Nombre y apellido: .... Número de alumno: ....

Carrera: ....

Análisis Matemático II — Segundo parcial (segunda fecha) – 19-12-17

1. Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   a) Encontrar (y clasificar) sus puntos críticos.

   b) Encontrar el único candidato a extremo de f sujeta a la restricción $D = \left\{(x, y, z) : z \geq 2 + x^2 + y^2\right\}$. Indicar (y comprobar) las hipótesis del resultado teórico utilizado.

   Comprobar que se trata de un mínimo absoluto. ¿Por qué no es una contradicción el no haber encontrado máximo absoluto, si sabemos que f es continua sobre D?

2. *a*) Hallar el volumen del sólido determinado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ y $x + z = 2$.

   b) Sea S la superficie dada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$, que se encuentra a la izquierda del plano $y + 2z = 1$. Calcular el flujo del campo $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (0, y, \frac{z}{2})$ a través de la superficie S, de manera tal que el normal tenga segunda componente negativa.

3. Consideremos el campo $\vec{\mathbf{F}} = (x + 2y + az)\breve{i} + (bx - 3y - z)\breve{j} + (4x + cy + 2z)\breve{k}$.

   a) Hallar los valores adecuados de a, b y c para que el campo sea conservativo. Justificar la respuesta.

   b) Encontrar la familia de funciones potenciales. Justificar el procedimiento utilizado.

   c) Calcular el trabajo ejercido por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ para trasladar el punto $(1, 0, 0)$ de forma recta hasta el $(0, 1, 0)$ y luego, de modo recto también, hasta el $(0, 0, 1)$.

4. *a*) Sea $\vec{\mathbf{F}} = (xy + e^{x^2}, y^2 + \dfrac{x^2}{2} + x)$. Calcular $\displaystyle\int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r}$, donde C_1 es el segmento que une $(0, 1)$ con $(0, -1)$.

   b) Calcular $\displaystyle\int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r}$, donde C_2 es la porción derecha de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. (Sugerencia: utilizar adecuadamente el Teorema de Green y el inciso anterior).

   Indicar y comprobar las hipótesis del Teorema.

1		2		3			4	
a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*

1) a) (x,y,z) pto. crítico de $f \iff \nabla f(x,y,z)=\vec{0} \iff (2x,2y,2z)=\vec{0} \iff$
$\iff \boxed{(x,y,z)=\vec{0}}$ ↑ f diferenciable en $\mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \geqslant 0 = f(0,0,0) \rightsquigarrow$ Hay mínimo (absoluto) en $(0,0,0)$.

b) No hay candidatos en el interior de D. Buscamos en $\partial D = g^{-1}(0)$, siendo $g(x,y,z):=z-x^2-y^2-2$, por el Teo. de los multiplicadores de Lagrange:

$f,g\in C^1(\mathbb{R}^3)$; $\nabla g(x,y,z)=(-2x,-2y,1)\neq\vec{0}$ (en ∂D).

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2(x,y,z)=\lambda(-2x,-2y,1)\\ z-x^2-y^2-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cancel{2}x=-\cancel{2}\lambda x & (1)\\ \cancel{2}y=-\cancel{2}\lambda y & (2)\\ 2z=\lambda & (3)\\ z-x^2-y^2-2=0 & (4)\end{cases}$$

$x\neq 0$ ó $y\neq 0 \overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \lambda=-1 \overset{(3)}{\Longrightarrow} z=-\frac{1}{2} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \underbrace{-\frac{5}{2}}_{<0}=\underbrace{x^2+y^2}_{\geqslant 0}$ abs.!

$x=y=0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} (1),(2),\ z=2 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lambda=4$.

$\therefore$ El único candidato a extremizar $f|_D$ es $(0,0,2)$.

$$f|_D(x,y,z)=\underbrace{x^2+y^2}_{\geqslant 0}+z^2 \geqslant z^2 \underset{(x,y,z)\in D}{\geqslant} (2+\underbrace{x^2+y^2}_{\geqslant 0})^2 \geqslant 4 = f(0,0,2)$$

$\therefore$ En $(0,0,2)$ $f|_D$ alcanza el mínimo absoluto. (Interpretación: f es la distancia al origen al cuadrado y $(0,0,2)$ -vértice del paraboloide ∂D- es el pto. más cercano).

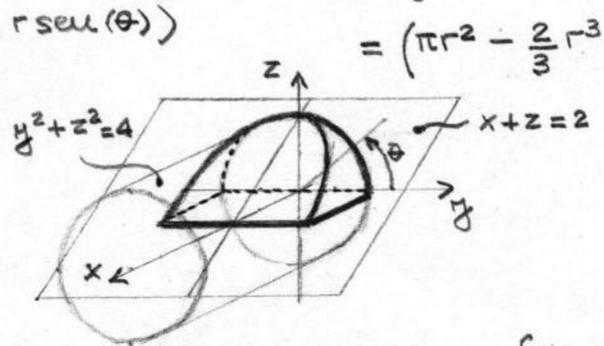
La inexistencia de máx. abs. estaría en contradicción con la conclusión del Teo. de Weierstrass, pero como D no es acotada, el mismo no es aplicable.

2) a) $$\text{Volumen}=\iiint_D dV \overset{(*)}{=} \int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2-r\,\text{sen}(\theta)} r\,dx\,d\theta\,dr = \int_0^2\int_0^\pi r(2-r\,\text{sen}(\theta))\,d\theta\,dr$$
$$=\int_0^2\Big(2\pi r+r^2\underbrace{\cos(\theta)\Big|_0^\pi}_{-2}\Big)dr$$
$$=\left(\pi r^2-\frac{2}{3}r^3\right)\Big|_0^2=\boxed{4\pi-\frac{16}{3}}$$

(*) $T: D^*\longrightarrow D$

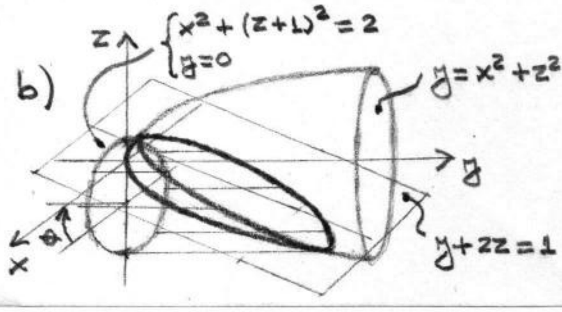
$(r,\theta,x)\longmapsto(x,r\cos(\theta),r\,\text{sen}(\theta))$

$$D^*:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 2\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant x\leqslant 2-r\,\text{sen}(\theta)\end{cases}$$



$|\det(JT)|=r$

b)



Paraboloide $\cap$ Plano: $\begin{cases}y=x^2+z^2\\ y+2z=1\end{cases} \iff$

$$\iff\begin{cases}y=x^2+z^2\\ x^2+z^2+2z=1\end{cases} \iff \begin{cases}y=x^2+z^2\\ x^2+(z+1)^2=2 \quad (*_1)\end{cases}$$

(*) representa un cilindro y nos permite caracterizar la proyección de la curva intersección al plano xz : $y=0$; $x^2+(z+1)^2=2$.

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta) \longmapsto \Big(r\cos(\theta),\ \overbrace{(r\cos(\theta))^2+(r\operatorname{sen}(\theta)-1)^2}^{r^2-2r\operatorname{sen}(\theta)+1},\ r\operatorname{sen}(\theta)-1\Big)$$

$$D:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant \sqrt{2} \\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi \end{cases} \qquad \vec{n}=\Phi_r\times\Phi_\theta=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & 2r-2\operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -r\operatorname{sen}(\theta) & -2r\cos(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$=\left(2r^2\cos(\theta),\ -r,\ -2r+2r^2\operatorname{sen}(\theta)\right)$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left(0,\ r^2-2r\operatorname{sen}(\theta)+1,\ \frac{r\operatorname{sen}(\theta)-1}{2}\right)\cdot\vec{n}(r,\theta)\,d\theta\,dr=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}-r^3\overbrace{(1-\operatorname{sen}^2(\theta))}^{\cos^2(\theta)}d\theta\,dr$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}-r^3\,\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\,dr=\int_0^{\sqrt{2}}-\frac{r^3}{2}\left(\theta+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}dr=\int_0^{\sqrt{2}}-\pi r^3\,dr=\frac{-\pi r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\boxed{-\pi}$$

$\operatorname{Dom}(\vec{F})=\mathbb{R}^3$, simplemente conexo ; $\vec{F}\in C^1(\mathbb{R}^3)$.

3) a) $\vec{F}$ conservativo $\iff \operatorname{rot}(\vec{F})=\vec{0} \iff (c+1,\ a-4,\ b-2)=\vec{0} \iff \boxed{a=4,\ b=2,\ c=-1}$

b) $\vec{F}=\nabla\varphi=(x+2y+4z,\ 2x-3y-z,\ 4x-y+2z)$

$\varphi_x=x+2y+4z \implies \varphi=\frac{x^2}{2}+2xy+4xz+f(y,z)$

$2x+f_y(y,z)=\varphi_y=2x-3y-z \implies f(y,z)=-\frac{3}{2}y^2-yz+g(z)$

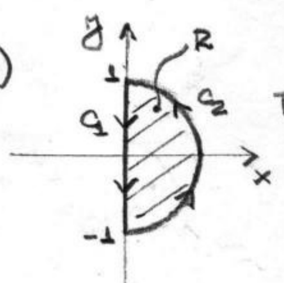
$4x-y+g'(z)=\varphi_z=4x-y+2z \implies g(z)=z^2+C\ ,\ C\in\mathbb{R}$.

$\therefore\ \varphi(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2+z^2+2xy+4xz-yz+C,\ C\in\mathbb{R}$.

c) Por ser $\vec{F}$ conservativo, el trabajo sólo depende de las posiciones inicial y final : $W=\varphi(0,0,1)-\varphi(1,0,0)=1-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$

4) a) $$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^{-1}\overbrace{\vec{F}(0,t)}^{(1,t^2)}\cdot(0,1)\,dt=\int_1^{-1}t^2\,dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{-1}=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

b)



R: región de tipo III ; $\vec{F}$: campo C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Teo. de Green

$$\underbrace{\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA}_{\iint_R 1\,dA=\frac{\pi}{2}}=\underbrace{\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{-\frac{2}{3}}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(área de medio círculo de radio 1)

$$\implies \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\boxed{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}}$$