

Nombre:

Nº Alumno:

2^{do} parcial - recuperatorio

1. Considere un sistema de dos partículas idénticas que pueden ocupar niveles de energía $E_n = nE$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. El sistema está en equilibrio térmico a temperatura T .

a) Determine la función de partición, la energía media y haga un dibujo de las configuraciones en los siguientes casos:

(a) partículas distinguibles que obedecen la estadística de Boltzman.

(b) fermiones

(c) bosones

b) Discuta bajo qué condiciones en este sistema fermiones y bosones pueden tratarse como partículas de Boltzman.

c) Calcule la energía libre de Helmholtz, la entropía y el calor específico.

2. La densidad de estados de un gas ideal de Bose-Einstein está dada por

$$a(\epsilon) = \begin{cases} \alpha \epsilon^2 & \epsilon \geq 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases}$$

donde α es una constante (con unidades de energía⁻³).

a) Halle la temperatura crítica T_c para la condensación de Bose-Einstein en este gas.

b) Grafique (a mano alzada) las fracciones de partículas en el estado fundamental y en estados excitados en función de T/T_c .

3. Considere un gas de fermiones de densidad n y temperatura $T = 0$. La masa en reposo de las partículas es m . La energía cinética del fermión está dada por $\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$.

a) Encontrar la energía y el momento de Fermi.

b) Encontrar la energía total y la presión del gas.

c) Determinar la relación entre la energía interna y presión en el límite de baja $n \ll (mc/h)^3$ y alta $n \gg (mc/h)^3$ densidad.

Fórmulas útiles

Función gamma:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$$

Integrales de Bose-Einstein:

$$g_n(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} \quad \forall n, \quad z \in [0, 1]$$

siendo $g_n(1) = \sum_{l=1}^{\infty} 1/l^n = \zeta(n)$ para $n > 1$.

Función zeta de Riemann:

$$\zeta(3/2) \simeq 2.612, \quad \zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(5/2) \simeq 1.341, \quad \zeta(3) \simeq 1.202, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \dots$$