Introducción a la Relatividad General

Segundo semestre de 2015 - Evaluación Parcial: Soluciones

25 de febrero de 2016

Problema 1 - *Espacio anti-de Sitter*

Considere el espacio de anti-de Sitter en 2+1 dimensiones, cuya métrica puede escribirse como

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho \, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\theta^2 \, .$$

Halle el valor de la constante cosmológica para el cual el espacio de anti-de Sitter es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Solución

Calculamos los símbolos de Christoffel utilizando

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma} \right) ,$$

y obtenemos que los no nulos son

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{t}{}_{\rho t} = \Gamma^{t}{}_{t\rho} = \tanh \rho & , & \Gamma^{\rho}{}_{tt} = \cosh \rho \sinh \rho \, , \\ \Gamma^{\theta}{}_{\rho\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta\rho} = \coth \rho & \text{y} & \Gamma^{\rho}{}_{\theta\theta} = -\cosh \rho \sinh \rho \, . \end{array}$$

Calculamos el tensor de curvatura de Riemann utilizando

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\delta\rho} \Gamma^{\delta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\delta\sigma} \Gamma^{\delta}{}_{\nu\rho} \, ,$$

y encontramos que las componentes independientes no nulas son

$$\begin{aligned} R^{t}{}_{\rho t \rho} &= R^{\theta}{}_{\rho\theta\rho} = -1 \, , \\ R^{t}{}_{\theta t \theta} &= R^{\rho}{}_{\theta\rho\theta} = -\sinh^2 \rho \, , \\ R^{\rho}{}_{t\rho t} &= R^{\theta}{}_{t\theta t} = \cosh^2 \rho \, . \end{aligned}$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ tiene entonces las componentes no nulas

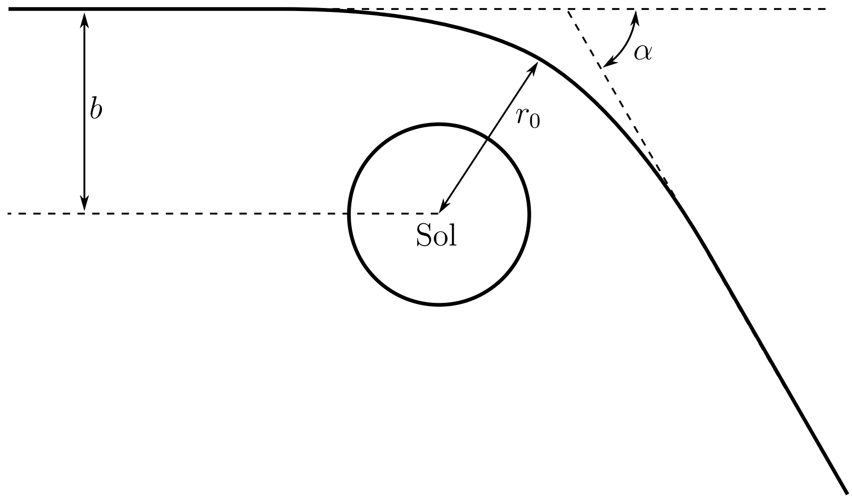
$$R_{tt} = 2\cosh^2 \rho \qquad , \qquad R_{\rho\rho} = -2 \qquad \text{y} \qquad R_{\theta\theta} = -2\sinh^2 \rho \, ,$$

que podemos escribir como $R_{\mu\nu} = -2 g_{\mu\nu}$. La curvatura escalar es entonces $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -2\delta^{\mu}{}_{\mu} = -6$, y las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ en el vacío son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Lambda = -1 \, .$$

Problema 2 - *Deflexión de la luz*

Considere un rayo de luz que se acerca al Sol proveniente de una estrella muy lejana. Calcule el ángulo de deflexión α del rayo debido a la presencia del Sol, a primer orden en la masa solar, tal como es medido por un observador muy lejano y en reposo. Exprese el resultado en términos del acercamiento máximo r_0 al Sol, o alternativamente del parámetro de impacto b.



Ayuda: Puede utilizar que para $x \ll 1$ se tiene

$$\int_1^\infty \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-1/2} \left[u^2 \frac{1-x}{1-\frac{x}{u}} - 1\right]^{-1/2} \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} + x + \mathcal{O}(x^2)\,.$$

Solución

La geometría en el exterior del Sol es descripta por la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\,,$$

donde M es la masa solar y la coordenada angular ϕ es precisamente el ángulo medido por un observador en reposo en el infinito, reduciéndose allí la métrica a la de Minkowski.

Como las geodésicas en la geometría de Schwarzschild son planares, el rayo de luz se mantiene siempre en el plano que contiene a su dirección de incidencia y al centro del Sol (que podemos considerar sin pérdida de generalidad como aquel con $\theta = \frac{\pi}{2}$). Si parametrizamos la trayectoria del rayo con un parámetro afín λ tal que $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, éste tiene entonces $p^\theta = 0$ y

$$p_\mu p^\mu = g_{tt}(p^t)^2 + g_{rr}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2 = 0\,.$$

La independencia de los coeficientes de la métrica de Schwarzschild respecto a las coordenadas t y ϕ implica la existencia de dos vectores de Killing $\xi^\mu_{(t)} = (1,0,0,0)$ y $\xi^\mu_{(\phi)} = (0,0,0,1)$. Asociadas a estos vectores de Killing tenemos cargas conservadas a lo largo de las geodésicas, dadas por $\xi^\mu p_\mu$. Introducimos entonces las cantidades conservadas $E = \xi^\mu_{(t)} p_\mu = g_{tt} p^t$ y $L = \xi^\mu_{(\phi)} p_\mu = g_{\phi\phi} p^\phi$ para escribir

$$-\frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0\,.$$

En el punto de máximo acercamiento de la trayectoria al Sol

$$\left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{r=r_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L^2 = E^2 \frac{r_0^2}{1-\frac{2M}{r_0}}\,,$$

de modo que

$$1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\frac{1-\frac{2M}{r_0}}{1-\frac{2M}{r}}+\frac{1}{r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=0\,, \tag{1}$$

donde usamos que $\frac{dr}{d\lambda}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\lambda}$ y $p^\phi=\frac{d\phi}{d\lambda}=L/r^2$. Llegamos así a una ecuación diferencial para $\phi(r)$, a saber

$$\left|\frac{d\phi}{dr}\right|=\frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}}{r}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\frac{1-\frac{2M}{r_0}}{1-\frac{2M}{r}}-1\right]^{-1/2}\,.$$

La trayectoria del rayo de luz puede separarse en dos partes, una en la que r disminuye desde $r\to\infty$ hasta $r=r_0$, y otra en la que aumenta desde $r=r_0$ hasta $r\to\infty$. Por simetría, el arco subtendido en la coordenada ϕ es en ambas partes el mismo, de modo que

$$\Delta\phi=2\int_{r_0}^{\infty}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\frac{1-\frac{2M}{r_0}}{1-\frac{2M}{r}}-1\right]^{-1/2}\frac{dr}{r}\,.$$

Definiendo $u=r/r_0$ y $x=\frac{2M}{r_0}$ tenemos

$$\Delta\phi=2\int_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-1/2}\left[u^2\frac{1-x}{1-\frac{x}{u}}-1\right]^{-1/2}\frac{du}{u}\,.$$

Para el Sol, $2M/r\ll 1$ incluso cuando r es el radio solar, luego nos quedamos con la aproximación a primer orden en $x\ll 1$ para obtener

$$\Delta\phi\simeq\pi+\frac{4M}{r_0}\,.$$

En ausencia del Sol, el arco subtendido en la coordenada ϕ sería de π radianes, correspondiendo a una trayectoria recta, de modo que la deflexión del rayo de luz debido a la presencia del Sol es

$$\alpha=\Delta\phi-\pi\simeq\frac{4M}{r_0}\,,$$

que utilizando la masa solar $M=1{,}476$ km alcanza un valor máximo cuando el máximo acercamiento es el radio solar $r_0=6{,}96\times10^5$ km, resultando en una deflexión de $\alpha=1{,}75''$.

Para establecer la relación con el parámetro de impacto b, observamos que si el ángulo de incidencia es $\phi=\phi_0$ tenemos que con $r\to\infty$ y $\phi\to\phi_0$

$$b\simeq r\sin(\phi-\phi_0)\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{dr}{d\phi}\simeq-\frac{b}{\sin^2(\phi-\phi_0)}\cos(\phi-\phi_0)\simeq-\frac{r^2}{b}\,,$$

de modo que de (1) obtenemos $b\simeq r_0$ a orden cero (que es el relevante en este caso porque r_0 aparece en la primera corrección). Por lo tanto, el resultado para el ángulo de deflexión a primer orden puede escribirse también

$$\alpha\simeq\frac{4M}{b}\,.$$

Problema 3 - *Vectores de Killing y cargas conservadas*

(a) Sea ξ^μ un campo vectorial de Killing y sea u^μ el vector tangente a una geodésica $x^\mu(\lambda)$ parametrizada por el parámetro afín λ. Pruebe que $\xi \cdot u$ es una cantidad conservada a lo largo de la geodésica.

(b) Muestre que si todos los coeficientes de la métrica son independientes de una dada coordenada, entonces el momento conjugado a dicha coordenada se conserva a lo largo de la trayectoria de una partícula libre.

(c) Muestre que si $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía impulso y ξ^μ es un vector de Killing, $J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu$ es una corriente conservada.

(d) Para un vector de Killing ξ^μ, pruebe la identidad $\xi_{\mu;\nu\rho} = R^\delta{}_{\rho\nu\mu}\xi_\delta$.

Solución

Para ver que $\xi \cdot u$ es una cantidad conservada a lo largo de la geodésica debemos mostrar que $\frac{d}{d\lambda}(\xi \cdot u) = 0$. Como $\xi \cdot u$ es un escalar cuya dependencia en el parámetro λ es sólo a través de $x^\mu(\lambda)$, tenemos

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi \cdot u) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu(\xi_\nu u^\nu) = u^\mu \nabla_\mu(\xi_\nu u^\nu)\,,$$

donde en la segunda igualdad usamos $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ y que para un escalar $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu$. Ahora bien, por la regla de Leibniz esto implica

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi \cdot u) = u^\mu u^\nu \nabla_\mu \xi_\nu + \xi_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\nu\,,$$

y el primer término a la derecha se anula porque es la contracción de un tensor antisimétrico ($\xi_{\nu;\mu} = -\xi_{\mu;\nu}$ por ser ξ^μ un vector de Killing) con otro simétrico (*i.e* $u^\mu u^\nu$), mientras que el segundo término se anula porque las geodésicas son aquellas curvas que transportan paralelamente a su vector tangente, es decir que satisfacen

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0\,.$$

Una demostración alternativa, en la que la aparición de la ecuación geodésica es algo más explícita, sería

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}(\xi \cdot u) &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu(\xi_\nu u^\nu) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\xi_{\nu,\mu}u^\nu + \xi_\nu u^\nu{}_{,\mu}\right) \\
&= \xi_{\nu,\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \xi_\nu \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} \\
&= \left(\xi_{\nu;\mu} + \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\xi_\rho\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \xi_\nu \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} \\
&= \xi_{\nu;\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \xi_\rho\left(\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\,.
\end{aligned}$$

Nuevamente el primer término a la derecha se anula por la antisimetría de $\xi_{\nu;\mu}$, mientras que el segundo término se anula porque el factor entre paréntesis es precisamente la ecuación geodésica para el parámetro afín λ.

Para ver que la independencia de los coeficientes de la métrica respecto a una variable dada implica la conservación de su momento conjugado, llamemos a dicha variable x y consideremos el vector $\vec{\xi} = \vec{e}_x$. Tenemos

$$\xi_{\mu;\nu} = \nabla_\nu(g_{\mu\rho}\xi^\rho) = g_{\mu\rho}\xi^\rho{}_{;\nu} = g_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\delta\nu}\xi^\delta\,,$$

donde usamos que $g_{\mu\rho;\nu} = 0$ y que $\xi^\rho{}_{,\nu} = 0$ porque todas las componentes de $\vec{e}_x$ son constantes. Luego

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} &= \xi^\delta \left(g_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\delta\nu} + g_{\nu\rho}\Gamma^\rho{}_{\delta\mu} \right) \\
&= \frac{\xi^\delta}{2} \left(g_{\mu\delta,\nu} + g_{\mu\nu,\delta} - g_{\delta\nu,\mu} + g_{\nu\delta,\mu} + g_{\nu\mu,\delta} - g_{\delta\mu,\nu} \right) \\
&= \xi^\delta g_{\mu\nu,\delta} = g_{\mu\nu,x} \,,
\end{aligned}$$

donde usamos la definición de los símbolos de Christoffel y que $(\vec{e}_x)^\mu = \delta^\mu_x$. Como los coeficientes de la métrica no dependen de x tenemos que $g_{\mu\nu,x} = 0$, de modo que demostramos que ξ^μ es un vector de Killing, ya que satisface

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \,.$$

Una partícula libre sigue una geodésica y tiene momento $p_\mu = m u_\mu$, siendo m la masa de la partícula y u_μ el covector asociado al vector tangente a la geodésica. Por el inciso anterior tenemos que $\xi^\mu u_\mu = u_x$ se conserva a lo largo de la geodésica, de modo que el momento conjugado a la coordenada x, es decir $p_x = m u_x$, también se conserva.

Para ver que $J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu$ es una corriente conservada, debemos mostrar que $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Vemos que

$$\nabla_\mu J^\mu = T^{\mu\nu}{}_{;\mu}\xi_\nu + T^{\mu\nu}\xi_{\nu;\mu} \,,$$

pero el primer término se anula por la conservación del tensor de energía impulso (que, a través de la ecuación de Einstein, refleja las identidades de Bianchi del tensor de Einstein), mientras que el segundo se anula porque $T^{\mu\nu}$ es simétrico mientras que $\xi_{\nu;\mu}$ es antisimétrico.

Para demostrar la identidad partimos de la definición del tensor de Riemann como aquel que caracteriza al conmutador de dos derivadas covariantes,

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] \xi^\rho = R^\rho{}_{\delta\mu\nu}\xi^\delta \,,$$

que puede expresarse también en la forma

$$\xi_{\rho;\nu\mu} - \xi_{\rho;\mu\nu} = -R^\delta{}_{\rho\mu\nu}\xi_\delta \,. \tag{1}$$

Sumamos las tres permutaciones cíclicas de los índices libres de esta ecuación para aprovechar la propiedad cíclica del tensor de Riemann,

$$R^\delta{}_{\rho\mu\nu} + R^\delta{}_{\nu\rho\mu} + R^\delta{}_{\mu\nu\rho} = 0 \,,$$

y obtenemos así

$$0 = \xi_{\rho;\nu\mu} - \xi_{\rho;\mu\nu} + \xi_{\mu;\rho\nu} - \xi_{\mu;\nu\rho} + \xi_{\nu;\mu\rho} - \xi_{\nu;\rho\mu} \,.$$

Como ξ^μ es un vector de Killing, tenemos que en la ecuación de arriba todos los tensores son antisimétricos en sus primeros dos índices, de modo que podemos juntar los términos repetidos para obtener

$$\xi_{\rho;\nu\mu} - \xi_{\rho;\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu\rho} = 0 \,.$$

Volviendo con este resultado a (1) tenemos

$$\xi_{\mu;\nu\rho} = -R^\delta{}_{\rho\mu\nu}\xi_\delta = R^\delta{}_{\rho\nu\mu}\xi_\delta \,,$$

como queríamos demostrar.