Introducción a la Relatividad General

Segundo semestre de 2015 - Evaluación Parcial: Soluciones

10 de diciembre de 2015

Problema 1 - *Ondas gravitatorias no lineales*

Para buscar ondas gravitatorias que sean soluciones de las ecuaciones de Einstein no linearizadas, podemos tomar como variable $u = t - z$ por analogía con el caso linearizado. Introduciendo una variable complementaria $v = t + z$, escriba las ecuaciones de Einstein en el vacío para el ansatz

$$ds^2 = -du\,dv + f(u)^2 dx^2 + g(u)^2 dy^2\,.$$

Solución

Calculamos los símbolos de Christoffel utilizando

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma} \right)\,,$$

y obtenemos que los no nulos son[1]

$$\begin{aligned} \Gamma^{x}{}_{xu} = \Gamma^{x}{}_{ux} &= \frac{f'(u)}{f(u)} \qquad , \qquad & \Gamma^{y}{}_{yu} = \Gamma^{y}{}_{uy} &= \frac{g'(u)}{g(u)}\,, \\ \Gamma^{v}{}_{xx} &= 2f(u)f'(u) \qquad \text{y} \qquad & \Gamma^{v}{}_{yy} &= 2g(u)g'(u)\,. \end{aligned}$$

Calculamos el tensor de curvatura de Riemann utilizando

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\delta\rho}\Gamma^{\delta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\delta\sigma}\Gamma^{\delta}{}_{\nu\rho}\,,$$

y encontramos que las componentes independientes no nulas son

$$\begin{aligned} R^{x}{}_{uxu} &= -\frac{f''(u)}{f(u)} \qquad , \qquad & R^{y}{}_{uyu} &= -\frac{g''(u)}{g(u)}\,, \\ R^{v}{}_{xxu} &= -2f(u)f''(u) \qquad \text{y} \qquad & R^{v}{}_{yyu} &= -2g(u)g''(u)\,. \end{aligned}$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ tiene entonces una sola componente no nula,

$$R_{uu} = -\frac{f''(u)}{f(u)} - \frac{g''(u)}{g(u)}\,,$$

y la curvatura escalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es idénticamente cero. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein en el vacío son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f''(u)}{f(u)} + \frac{g''(u)}{g(u)} = 0\,.$$

[1] Hay un error de tipeo en las expresiones de $\Gamma^{v}{}_{xx}$ y $\Gamma^{v}{}_{yy}$ en la página 211 de "A First Course in General Relativity", de Bernard Schutz (2[da] edición). Tampoco se reportan allí los valores de $R^{v}{}_{xxu}$ y $R^{v}{}_{yyu}$, que son no nulos aunque irrelevantes para hallar las ecuaciones de Einstein. Los resultados posteriores, y en particular la ecuación de Einstein (9.32), sí son correctos.

Problema 2 - *Vectores de Killing en S^2 y órbitas en la métrica de Schwarzschild*

(a) Resuelva la ecuación de Killing en S^2 para hallar los vectores de Killing en las coordenadas

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\,.$$

(b) La métrica de Schwarzschild posee simetría esférica e invariancia frente a traslaciones temporales. Utilice los vectores de Killing correspondientes para mostrar que las geodésicas en esta geometría son planares, y luego hallar una ecuación diferencial de primer orden para las órbitas de partículas expresando r en función de ϕ.

Solución

Debemos resolver la ecuación de Killing,

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\xi_\delta = 0\,,$$

en las coordenadas $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$. Calculamos los símbolos de Christoffel utilizando

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}\right)\,,$$

y obtenemos

$$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta \qquad \text{y} \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \cot\theta\,.$$

De la ecuación de Killing con $\mu = \theta$ y $\nu = \theta$ obtenemos

$$\xi_{\theta,\theta} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_\theta = f(\phi)\,,$$

mientras que de la ecuación con $\mu = \phi$ y $\nu = \phi$ obtenemos

$$\xi_{\phi,\phi} + \cos\theta\sin\theta\,\xi_\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_\phi = -\cos\theta\sin\theta F(\phi) + g(\theta)\,,$$

siendo $F(\phi)$ una primitiva de $f(\phi)$. Finalmente, la ecuación para $\mu = \theta$ y $\nu = \phi$ es

$$\begin{aligned} \xi_{\theta,\phi} + \xi_{\phi,\theta} &= 2\cot\theta\xi_\phi \\ f'(\phi) + g'(\theta) - \cos(2\theta)F(\phi) &= 2\cot\theta\left[g(\theta) - \cos\theta\sin\theta F(\phi)\right] \\ f'(\phi) + F(\phi) &= 2\cot\theta g(\theta) - g'(\theta)\,, \end{aligned}$$

y como tenemos variables separadas a ambos lados

$$f'(\phi) + F(\phi) = \mathbb{C} \qquad \text{y} \qquad 2\cot\theta g(\theta) - g'(\theta) = \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

para alguna constante $\mathbb{C}$. Derivando la primera ecuación hallamos $f(\phi)$,

$$f''(\phi) + f(\phi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\phi) = A\sin\phi + B\cos\phi\,,$$

para A y B constantes, de modo que $F(\phi) = -A\cos\phi + B\sin\phi$ y volviendo a la ecuación original (1) vemos que $\mathbb{C} = 0$. Para la segunda ecuación en (1) observamos que hay un factor integrante $-2\cot\theta = (-2\log\sin\theta)'$, de modo que si llamamos $h(\theta) = -2\log\sin\theta$ tenemos

$$\begin{aligned} h'(\theta)g(\theta) + g'(\theta) &= 0 \\ e^{h(\theta)}\left[h'(\theta)g(\theta) + g'(\theta)\right] &= 0 \\ \left(e^{h(\theta)}g(\theta)\right)' &= 0 \\ \frac{g(\theta)}{\sin^2\theta} &= C\,, \end{aligned}$$

para C constante. Hallamos así las componentes de una 1-forma de Killing totalmente general,

$$\xi_\theta = A\sin\phi + B\cos\phi \qquad \text{y} \qquad \xi_\phi = A\cos\phi\cos\theta\sin\theta - B\sin\phi\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta\,,$$

que entendemos como una combinación lineal de tres 1-formas de Killing linealmente independientes, $\xi_\mu = A\xi_\mu^{(1)} + B\xi_\mu^{(2)} + C\xi_\mu^{(3)}$ con

$$\begin{aligned}\xi_\mu^{(1)} &= (\sin\phi, \cos\phi\cos\theta\sin\theta)\,,\\ \xi_\mu^{(2)} &= (\cos\phi, -\sin\phi\cos\theta\sin\theta)\,,\\ \xi_\mu^{(3)} &= (0, \sin^2\theta)\,.\end{aligned}$$

Utilizando la métrica inversa, obtenemos los vectores de Killing correspondientes,

$$\begin{aligned}\xi^\mu_{(1)} &= (\sin\phi, \cos\phi\cot\theta)\,,\\ \xi^\mu_{(2)} &= (\cos\phi, -\sin\phi\cot\theta)\,,\\ \xi^\mu_{(3)} &= (0, 1)\,.\end{aligned}$$

Para la métrica de Schwarzschild, los vectores de Killing relevantes son

$$\begin{aligned}\xi^\mu_{(0)} &= (1, 0, 0, 0)\,,\\ \xi^\mu_{(1)} &= (0, 0, \sin\phi, \cos\phi\cot\theta)\,,\\ \xi^\mu_{(2)} &= (0, 0, \cos\phi, -\sin\phi\cot\theta)\,,\\ \xi^\mu_{(3)} &= (0, 0, 0, 1)\,,\end{aligned}$$

representando $\xi^\mu_{(0)}$ la invariancia frente a traslaciones temporales y $\xi^\mu_{(1,2,3)}$ las rotaciones en la esfera. Como la cantidad $\xi^\mu p_\mu$ se conserva a lo largo de una geodésica, a cada vector de Killing le corresponde una carga conservada, y en particular llamamos $E = \xi^\mu_{(0)} p_\mu = p_t$ y $L = \xi^\mu_{(3)} p_\mu = p_\phi$.

Para mostrar que las órbitas son planares, construimos la cantidad conservada

$$\mathbb{K} \equiv \left(\xi^\mu_{(1)} p_\mu\right)^2 + \left(\xi^\mu_{(2)} p_\mu\right)^2 + \left(\xi^\mu_{(3)} p_\mu\right)^2 = p_\theta^2 + \frac{L^2}{\sin^2\theta}\,,$$

que podemos evaluar eligiendo sin pérdida de generalidad las coordenadas de modo tal que la posición y velocidad iniciales sean en el plano ecuatorial, es decir $\theta|_{\tau=0} = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{d\theta}{d\tau}\big|_{\tau=0} = 0$. Entonces como $p_\theta = r^2 m \frac{d\theta}{d\tau}$ en el instante inicial tenemos $p_\theta = 0$ y $\mathbb{K} \equiv L^2$. Ahora bien, para todo τ debe darse

$$p_\theta^2 = L^2 - \frac{L^2}{\sin^2\theta} = -L^2\cot^2\theta\,,$$

pero esta ecuación claramente sólo tiene solución si ambos lados se anulan, es decir si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ y $p_\theta = r^2 m\frac{d\theta}{d\tau} \equiv 0$.

Para hallar una ecuación diferencial para r en función de ϕ, vemos que como $p^\theta = 0$

$$\begin{aligned}-m^2 = p^\mu p_\mu &= g_{tt}(p^t)^2 + g_{rr}\,(p^r)^2 + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2\\ &= g^{tt}E^2 + g^{\phi\phi}L^2 + g_{rr}\left(m\frac{dr}{d\tau}\right)^2\,,\end{aligned}$$

donde usamos que, como la métrica es diagonal, $p^t = g^{tt}p_t$ y $p^\phi = g^{\phi\phi}p_\phi$. Despejamos de aquí $\frac{dr}{d\tau}$ para obtener

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{\left(\frac{(E/m)^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{(L/m)^2}{r^2} - 1\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\,.$$

Finalmente, usamos que $L = p_\phi = g_{\phi\phi}p^\phi = r^2 m\frac{d\phi}{d\tau}$ para hallar la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\phi} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)\Big/\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = \pm\frac{r^2}{L/m}\sqrt{\left(\frac{(E/m)^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{(L/m)^2}{r^2} - 1\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\,.$$

Problema 3 - *Universo estático de Einstein*

(a) Muestre que en el modelo de Friedmann-Lemaître la conservación de la energía implica

$$\frac{d}{dt}\left[\rho(t)R(t)^3\right] = -p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] .$$

(b) Antes de que se tuviera conocimiento de la expansión acelerada del universo, Einstein introdujo la constante cosmológica Λ para poder encontrar una solución cosmológica estática. Utilizando la ecuación adicional provista por las ecuaciones de Einstein,

$$3\frac{k + R'(t)^2}{R(t)^2} = 8\pi\rho(t) ,$$

halle el valor de Λ y del radio R_0 del universo para dicha solución, ambos en función de la densidad de energía de materia actual ρ_0. ¿De qué tipo de universo se trata? Puede suponer que, como es el caso en la actualidad, el universo estático de Einstein está dominado por la materia.

Solución

El modelo de Friedmann-Lemaître corresponde a un fluido perfecto en reposo en un marco de referencia cosmológico, es decir que

$$T^{\mu\nu} = [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu + p(t)g^{\mu\nu} , \tag{1}$$

con $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. La conservación de la energía queda expresada por la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, es decir que

$$\begin{aligned} 0 &= [p(t) + \rho(t)]_{,\nu}U^\mu U^\nu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu{}_{;\nu}U^\nu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu{}_{;\nu} + p(t)_{,\nu}g^{\mu\nu} \\ &= [p'(t) + \rho'(t)]U^\mu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu{}_{;t} + [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu{}_{;\nu} + p'(t)g^{\mu t} . \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora bien, tenemos $U^\mu{}_{;\nu} = U^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}U^\rho = \Gamma^\mu{}_{\nu t}$, luego necesitamos calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\nu t} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho\nu,t} + g_{\rho t,\nu} - g_{\nu t,\rho}) = \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}g_{\rho\nu,t} ,$$

y como la métrica es diagonal solo tenemos que considerar el caso $\mu = \nu$, de modo que

$$\Gamma^t{}_{tt} = 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \Gamma^\phi{}_{\phi t} = \frac{R'(t)}{R(t)} .$$

Volviendo a la ecuación (2), obtenemos

$$[p'(t) + \rho'(t)]U^\mu + 3[p(t) + \rho(t)]U^\mu\frac{R'(t)}{R(t)} + p'(t)\,g^{\mu t} = 0 ,$$

que es trivial para $\mu \neq 0$, mientras que para $\mu = 0$ resulta en

$$\rho'(t) + 3[p(t) + \rho(t)]\frac{R'(t)}{R(t)} = 0 .$$

Multiplicando esta ecuación por $R(t)^3$, obtenemos

$$\rho'(t)R(t)^3 + 3[p(t) + \rho(t)]R(t)^2R'(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left[\rho(t)R(t)^3\right] = -p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] .$$

Para hallar la solución estátitca de Einstein, vamos a considerar al término de la constante cosmológica como proveniente de un fluido perfecto, es decir que hacemos

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi\left(T^{\mu\nu}_{(m)} + T^{\mu\nu}_{(\Lambda)}\right) ,$$

con $T^{\mu\nu}_{(m)}$ el tensor de energía impulso de la materia original, y $T^{\mu\nu}_{(\Lambda)}$ el que corresponde a la componente de vacío provista por la constante cosmológica Λ, que tiene $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$ y $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ constantes (comparar (1) con $T^{\mu\nu}_{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi}g^{\mu\nu}$). El fluido perfecto del modelo de Friedmann-Lemaître tendrá entonces $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(m)} + T^{\mu\nu}_{(\Lambda)}$, es decir que

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_\Lambda \qquad \text{y} \qquad p(t) = p_m(t) + p_\Lambda .$$

Comenzamos por resolver la ecuación de conservación de la energía, que en este caso es

$$\begin{aligned}
\rho'(t)R(t)^3 + \rho(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] &= p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] \\
\rho'_m(t)R(t)^3 + (\rho_m(t) + \rho_\Lambda)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] &= (p_m(t) + p_\Lambda)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] \\
\rho'_m(t)R(t)^3 + \rho_m(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] &= p_m(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] ,
\end{aligned}$$

que no es más que la ecuación original tomando $\rho(t) \mapsto \rho_m(t)$, lo cual podía esperarse de antemano siendo que la conservación de la energía de vacío $T^{\mu\nu}_{(\Lambda);\nu} = 0$ es trivial. Como buscamos un universo dominado por la materia, como es el caso actual, tomamos $p_m(t) \ll \rho_m(t)$ de modo que

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_m(t)R(t)^3\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_m(t) = \rho_0\frac{R_0^3}{R(t)^3} ,$$

siendo ρ_0 y R_0 la densidad de energía y el radio del universo en la actualidad, $t = 0$. Introduciendo este resultado en la ecuación de Einstein, obtenemos

$$\frac{k + R'(t)^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi}{3}\left[\rho_0\frac{R_0^3}{R(t)^3} + \rho_\Lambda\right] ,$$

y podemos ahora derivar respecto a t para hallar una ecuación para $R''(t)$,

$$2R'(t)R''(t) = \frac{8\pi}{3}\left[-\rho_0 R_0^3\frac{R'(t)}{R(t)^2} + 2\rho_\Lambda R(t)R'(t)\right] .$$

Si exigimos que en la actualidad no haya una aceleración en la expansión del universo, debemos imponer que $R''(0) = 0$ cuando $R(0) = R_0$, y tenemos

$$\rho_0 - 2\rho_\Lambda = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_\Lambda = \tfrac{\rho_0}{2} .$$

Volviendo con este valor a la ecuación de Einstein, podemos exigir que el universo sea estático imponiendo $R'(t) = R''(t) = 0$, dado que todas las derivadas superiores de $R(t)$ serán combinaciones lineales de $R'(t)$ y $R''(t)$. Entonces tenemos como condición de consistencia para $R(t) \equiv R_0$

$$\frac{k}{R_0^2} = 4\pi\rho_0 ,$$

de modo que debemos tomar $k = 1$, es decir que se trata de un universo cerrado. Hallamos además que el radio actual es $R_0 = (4\pi\rho_0)^{-1/2}$, y la constante cosmológica es $\Lambda = 8\pi\rho_\Lambda = 4\pi\rho_0$.