Introducción a la Relatividad General

Segundo semestre de 2015 - Evaluación Parcial: Soluciones

3 de diciembre de 2015

Problema 1 - *Espacio de de Sitter*

Considere el espacio de de Sitter en 2+1 dimensiones, cuya métrica puede escribirse como

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \, d\Omega_2^2 \, .$$

(a) Muestre que este espacio puede considerarse como inmerso en un espacio plano de 3+1 dimensiones.

(b) Halle el valor de la constante cosmológica para el cual el espacio de de Sitter es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

(c) En estas coordenadas es manifiesta la simetría esférica del espacio de de Sitter, de modo que para hallar otras simetrías podemos restringirnos al plano ecuatorial. Resuelva la ecuación de Killing en estas condiciones para hallar los vectores de Killing correspondientes.

Solución

Consideremos el espacio de Minkowski en 3+1 dimensiones en coordenadas cartesianas,

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \, .$$

La simetría esférica de la métrica de de Sitter sugiere inmediatamente la parametrización

$$\begin{aligned} T &= f(t) \, , \\ X &= g(t) \sin\theta \cos\phi \, , \\ X &= g(t) \sin\theta \sin\phi \, , \\ X &= g(t) \cos\theta \, , \end{aligned}$$

con $f(t)$ y $g(t)$ funciones a determinar. El intervalo adquiere entonces la forma

$$ds^2 = \left[g'(t)^2 - f'(t)^2 \right] dt^2 + g(t)^2 d\Omega_2^2 \, ,$$

de modo que tomamos $g(t) = \cosh t$ y $f(t)$ queda determinada por la condición

$$\sinh^2 t - f'(t)^2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) = \sinh t \, .$$

Con esta parametrización, es fácil ver que el espacio de de Sitter es entonces la superficie del espacio-tiempo de Minkowski en 3+1 dimensiones determinada por la condición

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \, .$$

Calculamos ahora los símbolos de Christoffel utilizando

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma} \right) ,$$

y obtenemos que los no nulos son

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma^{t}{}_{\theta\theta} = \cosh t \sinh t & , & \Gamma^{t}{}_{\phi\phi} = \cosh t \sinh t \sin^2\theta \,, \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\cos\theta \sin\theta & , & \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \cot\theta \,, \\
\Gamma^{\theta}{}_{t\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta t} = \tanh t & \text{y} & \Gamma^{\phi}{}_{t\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi t} = \tanh t \,.
\end{array}$$

Calculamos el tensor de curvatura de Riemann utilizando

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\delta\rho}\Gamma^{\delta}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\delta\sigma}\Gamma^{\delta}{}_{\nu\rho} \,,$$

y encontramos que las componentes independientes no nulas son

$$\begin{aligned}
R^{t}{}_{\theta t\theta} &= R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = \cosh^2 t \,, \\
R^{t}{}_{\phi t\phi} &= R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \cosh^2 t \sin^2\theta \,, \\
R^{\theta}{}_{t\theta t} &= R^{\phi}{}_{t\phi t} = -1 \,.
\end{aligned}$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ tiene entonces las componentes no nulas

$$R_{tt} = -2 \qquad , \qquad R_{\theta\theta} = 2\cosh^2 t \qquad \text{y} \qquad R_{\phi\phi} = 2\cosh^2 t \sin^2\theta \,,$$

que podemos escribir como $R_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}$. La curvatura escalar es entonces $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 2\delta^{\mu}{}_{\mu} = 6$, y las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ en el vacío son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Lambda = 1 \,.$$

Si nos restringimos al plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, la métrica de de Sitter es

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \, d\phi^2 \,,$$

y debemos resolver la ecuación de Killing

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\xi_{\delta} = 0 \,.$$

De la componente $\mu = t$ y $\nu = t$ obtenemos

$$\xi_{t,t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_t = f(\phi) \,,$$

mientras que con $\mu = \phi$ y $\nu = \phi$ resulta

$$\xi_{\phi,\phi} = \cosh t \sinh t \, \xi_t \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_\phi = \cosh t \sinh t F(\phi) + g(t) \,,$$

siendo $F(\phi)$ una primitiva de $f(\phi)$. La ecuación de Killing con $\mu = t$ y $\nu = \phi$ aporta una tercera ecuación,

$$\begin{gathered}
\xi_{t,\phi} + \xi_{\phi,t} = 2\tanh t \xi_\phi \\
f'(\phi) + \cosh(2t) F(\phi) + g'(t) = 2\tanh t \left(\cosh t \sinh t F(\phi) + g(t) \right) \\
f'(\phi) + F(\phi) = 2\tanh t g(t) - g'(t) \,.
\end{gathered}$$

Como tenemos variables separadas a ambos lados, debe darse

$$f'(\phi) + F(\phi) = \mathbb{C} \qquad \text{y} \qquad 2\tanh t g(t) - g'(t) = \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

para alguna constante $\mathbb{C}$. Derivando la primera ecuación hallamos $f(\phi)$,

$$f''(\phi) + f(\phi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\phi) = A\sin\phi + B\cos\phi\,,$$

de modo que $F(\phi) = -A\cos\phi + B\sin\phi$ y volviendo a la ecuación original (1) verificamos que $\mathbb{C} = 0$. Para hallar $g(t)$, vemos que la segunda ecuación en (1) tiene un factor integrante $h(t) = -2\log\cosh t$ tal que $h'(t) = -2\tanh t$, de modo que podemos hacer

$$\begin{aligned} h'(t)g(t) + g'(t) &= 0 \\ e^{h(t)}\left[h'(t)g(t) + g'(t)\right] &= 0 \\ \left[e^{h(t)}g(t)\right]' &= 0 \\ \frac{g(t)}{\cosh^2 t} &= C\,, \end{aligned}$$

para C constante. Hallamos así las componentes de una 1-forma de Killing totalmente general,

$$\xi_t = A\sin\phi + B\cos\phi \qquad \text{y} \qquad \xi_\phi = -A\cos\phi\cosh t\sinh t + B\sin\phi\cosh t\sin t + C\cosh^2 t\,,$$

que entendemos como una combinación lineal de tres 1-formas de Killing linealmente independientes, $\xi_\mu = -A\xi_\mu^{(1)} - B\xi_\mu^{(2)} + C\xi_\mu^{(3)}$ con[1]

$$\begin{aligned} \xi_\mu^{(1)} &= (-\sin\phi, \cos\phi\cosh t\sinh t)\,, \\ \xi_\mu^{(2)} &= (-\cos\phi, -\sin\phi\cosh t\sinh t)\,, \\ \xi_\mu^{(3)} &= (0, \cosh^2 t)\,. \end{aligned}$$

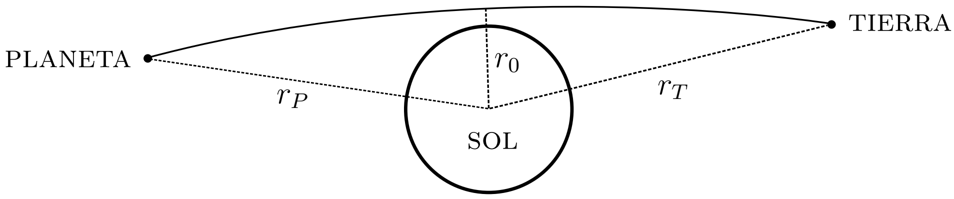
Utilizando la métrica inversa, obtenemos los vectores de Killing correspondientes,

$$\begin{aligned} \xi^\mu_{(1)} &= (\sin\phi, \cos\phi\tanh t)\,, \\ \xi^\mu_{(2)} &= (\cos\phi, -\sin\phi\tanh t)\,, \\ \xi^\mu_{(3)} &= (0, 1)\,. \end{aligned}$$

[1]Tenemos la libertad de elegir los signos porque $A, B, C \in \mathbb{R}$, y de este modo se simplifica el resultado final.

Problema 2 - *Retraso temporal de Shapiro*

Considere una señal enviada desde la Tierra hasta otro planeta, que se refleja en este y vuelve a ser detectada en la Tierra cierto tiempo después. Calcule la primera corrección al tiempo de viaje de la señal respecto al tiempo que le tomaría realizar el mismo recorrido si el espacio fuera plano. Exprese el resultado en términos del tiempo medido por un observador en reposo muy lejano, como función del máximo acercamiento r_0 de la señal al Sol. Desprecie las masas de los planetas respecto a la masa solar, así como su movimiento orbital durante todo el proceso.



Ayuda: Utilice que para $x \ll 1$ y $v > 1$ se tiene

$$\int_1^v \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-1} \left(1 - u^{-2}\frac{1-\frac{x}{u}}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} du \simeq \sqrt{v^2-1} + x\log\left(v + \sqrt{v^2-1}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{v-1}{v+1}}$$

Solución

Si despreciamos las masas de los planetas respecto a la masa del Sol, la geometría en el exterior del Sol es descripta por la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega_2^2\,,$$

donde M es la masa solar y la coordenada temporal t es precisamente el tiempo propio medido por un observador en reposo en el infinito.

Como las geodésicas en la geometría de Schwarzschild son planares, la señal es un rayo de luz coplanar con los planetas y el Sol, que podemos considerar sin pérdida de generalidad en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Tomamos a la trayectoria del rayo de luz como parametrizada por un parámetro afín λ tal que $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, de modo que tiene entonces $p^\theta = 0$ y

$$p_\mu p^\mu = g_{tt}(p^t)^2 + g_{rr}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2 = 0\,.$$

La independencia de los coeficientes de la métrica de Schwarzschild respecto a las coordenadas t y ϕ implica la existencia de dos vectores de Killing $\xi^\mu_{(t)} = (1,0,0,0)$ y $\xi^\mu_{(\phi)} = (0,0,0,1)$. Asociadas a estos vectores de Killing tenemos cargas conservadas a lo largo de las geodésicas, dadas por $\xi^\mu p_\mu$. Introducimos entonces las cantidades conservadas $E = \xi^\mu_{(t)}p_\mu = g_{tt}p^t$ y $L = \xi^\mu_{(\phi)}p_\mu = g_{\phi\phi}p^\phi$ para escribir

$$-\frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0\,.$$

En el punto de máximo acercamiento de la trayectoria al Sol

$$\left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{r=r_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L^2 = E^2\frac{r_0^2}{1-\frac{2M}{r_0}}\,,$$

de modo que

$$-\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}+\frac{1}{(1-\frac{2M}{r})^3}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2M}{r_0}}=0\,,$$

donde usamos que $\frac{dr}{d\lambda}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\lambda}$ y $\frac{dt}{d\lambda}=p^t=g^{tt}E$. Llegamos entonces a una ecuación diferencial para $r(t)$, a saber

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1-\frac{2M}{r}}{1-\frac{2M}{r_0}}}\,.$$

Si la señal parte de la Tierra en $r=r_T$ y llega al planeta en $r=r_P$, descomponemos su trayectoria en dos tramos, desde r_T hasta r_0 y desde r_0 hasta r_P. Para el primer tramo $\frac{dr}{dt}<0$, mientras que para el segundo tramo $\frac{dr}{dt}>0$, luego llamando

$$t(r)=\int_{r_0}^{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\frac{1-\frac{2M}{r}}{1-\frac{2M}{r_0}}\right)^{-\frac{1}{2}}dr\,,$$

tenemos que el tiempo de viaje total es $T=2[t(r_T)+t(r_P)]$, donde el factor dos da cuenta del regreso de la señal del planeta a la Tierra. Llamando $u=\frac{r}{r_0}$ y $x=\frac{2M}{r_0}$, esto es

$$t(r)=r_0\int_{1}^{\frac{r}{r_0}}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-1}\left(1-u^{-2}\frac{1-\frac{x}{u}}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}du\,.$$

Para el Sol, $2M/r\ll 1$ incluso cuando r es el radio solar, luego nos quedamos con la aproximación a primer orden en $x\ll 1$ para obtener

$$t(r)=\sqrt{r^2-r_0^2}+2M\log\frac{r+\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0}+M\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}\,.$$

El primer término corresponde al tiempo que le tomaría a un rayo de luz viajar desde r a r_0 en el espacio plano, mientras que los dos términos siguientes son correcciones debidas a la curvatura del espacio producida por la masa solar M. El resultado final es entonces que la señal se retrasa

$$\frac{\Delta T}{2M}=2\log\frac{r_T+\sqrt{r_T^2-r_0^2}}{r_0}+2\log\frac{r_P+\sqrt{r_P^2-r_0^2}}{r_0}+\sqrt{\frac{r_T-r_0}{r_T+r_0}}+\sqrt{\frac{r_P-r_0}{r_P+r_0}}\,,$$

de modo que con $r_T=1{,}496\times10^8$ km y $M=1{,}476$ km, para una señal reflejada en Mercurio $r_P=5{,}791\times10^7$ km y el máximo retraso se produce cuando $r_0=6{,}96\times10^5$ km es el radio solar, siendo

$$\Delta T\simeq 72\,\mathrm{km}=240\,\mu\mathrm{s}\,.$$

Problema 3 - *Modelo de Friedmann-Lemaître dominado por la radiación*

(a) Muestre que en el modelo de Friedmann-Lemaître la conservación de la energía implica

$$\frac{d}{dt}\left[\rho(t)R(t)^3\right] = -p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] .$$

(b) Utilizando la ecuación adicional provista por las ecuaciones de Einstein,

$$3\frac{k + R'(t)^2}{R(t)^2} = 8\pi\rho(t) ,$$

halle el parámetro de Hubble para un universo marginalmente abierto y dominado por la energía.

Solución

El modelo de Friedmann-Lemaître corresponde a un fluido perfecto en reposo en un marco de referencia cosmológico, es decir que

$$T^{\mu\nu} = [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu + p(t)g^{\mu\nu} ,$$

con $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. La conservación de la energía queda expresada por la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, es decir que

$$\begin{aligned} 0 &= [p(t) + \rho(t)]_{,\nu}U^\mu U^\nu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu{}_{;\nu}U^\nu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu{}_{;\nu} + p(t)_{,\nu}g^{\mu\nu} \\ &= [p'(t) + \rho'(t)]U^\mu + [p(t) + \rho(t)]U^\mu{}_{;t} + [p(t) + \rho(t)]U^\mu U^\nu{}_{;\nu} + p'(t)g^{\mu t} . \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora bien, tenemos $U^\mu{}_{;\nu} = U^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}U^\rho = \Gamma^\mu{}_{\nu t}$, luego necesitamos calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\nu t} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho\nu,t} + g_{\rho t,\nu} - g_{\nu t,\rho}) = \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}g_{\rho\nu,t} ,$$

y como la métrica es diagonal solo tenemos que considerar el caso $\mu = \nu$, de modo que

$$\Gamma^t{}_{tt} = 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \Gamma^\phi{}_{\phi t} = \frac{R'(t)}{R(t)} .$$

Volviendo a la ecuación (1), obtenemos

$$[p'(t) + \rho'(t)]U^\mu + 3[p(t) + \rho(t)]U^\mu\frac{R'(t)}{R(t)} + p'(t)\,g^{\mu t} = 0 ,$$

que es trivial para $\mu \neq 0$, mientras que para $\mu = 0$ resulta en

$$\rho'(t) + 3[p(t) + \rho(t)]\frac{R'(t)}{R(t)} = 0 .$$

Multiplicando esta ecuación por $R(t)^3$, obtenemos

$$\rho'(t)R(t)^3 + 3[p(t) + \rho(t)]R(t)^2R'(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left[\rho(t)R(t)^3\right] = -p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] .$$

Para un universo dominado por la energía, $p(t) \simeq \frac{1}{3}\rho(t)$ de modo que la conservación de la energía implica

$$\rho'(t)R(t)^3 + \tfrac{4}{3}\rho(t)[R(t)^3]' = 0\,,$$

es decir

$$[\log \rho(t)]' = -\tfrac{4}{3}[\log R(t)^3]' \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(t) = \rho_0 \left[\frac{R_0}{R(t)}\right]^4\,,$$

con $R(0) = R_0$ y $\rho(0) = \rho_0$ las condiciones en la actualidad, $t = 0$.

La ecuación de Einstein para un universo marginalmente abierto, es decir con $k = 0$, resulta entonces

$$R'(t)^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3}\frac{R_0^4}{R(t)^2}\,,$$

de donde

$$\begin{aligned} [R(t)R'(t)]^2 &= \frac{8\pi\rho_0}{3}R_0^4 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[R(t)^2] &= \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}}R_0^2 \\ R(t) &= R_0\sqrt{\omega t + 1}\,, \end{aligned}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{32\pi\rho_0}{3}}$ (en la fórmula de arriba fijamos la constante de integración de modo de satisfacer la condición inicial $R(0) = R_0$). El parámetro de Hubble es entonces

$$H(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{\omega/2}{\omega t + 1}\,.$$