

Introducción a la Relatividad General

Segundo semestre de 2015 - Evaluación Parcial

10 de diciembre de 2015

Indicaciones

Esta evaluación dura tres horas. Lea cuidadosamente los enunciados, resuelva todos los problemas y responda todas las preguntas. Revise sus cálculos y verifique sus resultados.

Problema 1 - Ondas gravitatorias no lineales

Para buscar ondas gravitatorias que sean soluciones de las ecuaciones de Einstein no linealizadas, podemos tomar como variable $u = t - z$ por analogía con el caso linealizado. Introduciendo una variable complementaria $v = t + z$, escriba las ecuaciones de Einstein en el vacío para el ansatz

$$ds^2 = -du dv + f(u)^2 dx^2 + g(u)^2 dy^2 .$$

Problema 2 - Vectores de Killing en S^2 y órbitas en la métrica de Schwarzschild

(a) Resuelva la ecuación de Killing en S^2 para hallar los vectores de Killing en las coordenadas

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 .$$

(b) La métrica de Schwarzschild posee simetría esférica e invariancia frente a traslaciones temporales. Utilice los vectores de Killing correspondientes para mostrar que las geodésicas en esta geometría son planares, y luego hallar una ecuación diferencial de primer orden para las órbitas de partículas expresando r en función de ϕ .

Problema 3 - Universo estático de Einstein

(a) Muestre que en el modelo de Friedmann-Lemaître la conservación de la energía implica

$$\frac{d}{dt} [\rho(t)R(t)^3] = -p(t)\frac{d}{dt} [R(t)^3] .$$

(b) Antes de que se tuviera conocimiento de la expansión acelerada del universo, Einstein introdujo la constante cosmológica Λ para poder encontrar una solución cosmológica estática. Utilizando la ecuación adicional provista por las ecuaciones de Einstein,

$$3\frac{k + R'(t)^2}{R(t)^2} = 8\pi\rho(t) ,$$

halle el valor de Λ y del radio R_0 del universo para dicha solución, ambos en función de la densidad de energía de materia actual ρ_0 . ¿De qué tipo de universo se trata? Puede suponer que, como es el caso en la actualidad, el universo estático de Einstein está dominado por la materia.