Introducción a la Relatividad General

Segundo semestre de 2015 - Evaluación Parcial
3 de diciembre de 2015

Indicaciones

Esta evaluación dura tres horas. Lea cuidadosamente los enunciados, resuelva todos los problemas y responda todas las preguntas. Revise sus cálculos y verifique sus resultados.

Problema 1 - *Espacio de de Sitter*

Considere el espacio de de Sitter en 2+1 dimensiones, cuya métrica puede escribirse como

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \, d\Omega_2^2 \, .$$

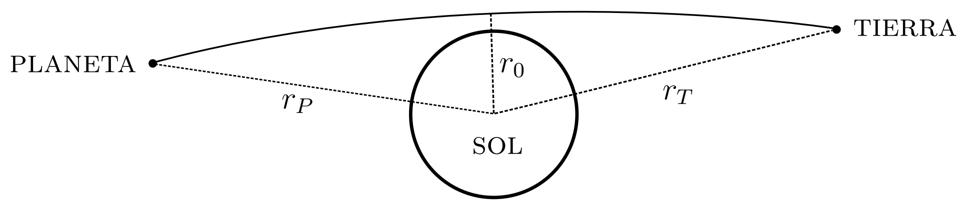
(a) Muestre que este espacio puede considerarse como inmerso en un espacio plano de 3+1 dimensiones.

(b) Halle el valor de la constante cosmológica para el cual el espacio de de Sitter es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

(c) En estas coordenadas es manifiesta la simetría esférica del espacio de de Sitter, de modo que para hallar otras simetrías podemos restringirnos al plano ecuatorial. Resuelva la ecuación de Killing en estas condiciones para hallar los vectores de Killing correspondientes.

Problema 2 - *Retraso temporal de Shapiro*

Considere una señal enviada desde la Tierra hasta otro planeta, que se refleja en este y vuelve a ser detectada en la Tierra cierto tiempo después. Calcule la primera corrección al tiempo de viaje de la señal respecto al tiempo que le tomaría realizar el mismo recorrido si el espacio fuera plano. Exprese el resultado en términos del tiempo medido por un observador en reposo muy lejano, como función del máximo acercamiento r_0 de la señal al Sol. Desprecie las masas de los planetas respecto a la masa solar, así como su movimiento orbital durante todo el proceso.



Ayuda: Utilice que para $x \ll 1$ y $v > 1$ se tiene

$$\int_1^v \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-1} \left(1 - u^{-2}\frac{1-\frac{x}{u}}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} du \simeq \sqrt{v^2-1} + x\log\left(v + \sqrt{v^2-1}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{v-1}{v+1}}$$

Problema 3 - *Modelo de Friedmann-Lemaître dominado por la radiación*

(a) Muestre que en el modelo de Friedmann-Lemaître la conservación de la energía implica

$$\frac{d}{dt}\left[\rho(t)R(t)^3\right] = -p(t)\frac{d}{dt}\left[R(t)^3\right] \, .$$

(b) Utilizando la ecuación adicional provista por las ecuaciones de Einstein,

$$3\frac{k + R'(t)^2}{R(t)^2} = 8\pi\rho(t) \, ,$$

halle el parámetro de Hubble para un universo marginalmente abierto y dominado por la energía.