· $L^2 \cdot |n,l,m\rangle = \hbar^2\, l(l+1)\, |n,l,m\rangle$

· $L_z |n,l,m\rangle = m\hbar\, |n,l,m\rangle$

Mecánica Cuántica I - 2013

Parcial

---

1. Los símbolos Φ_{nlm} y E_n denotarán el estado estacionario normalizado del átomo de hidrógeno, con números cuánticos (n, l, m_l) (omitiendo el factor que lleva la parte temporal), y su energía ($E_n = -(13{,}6\text{eV})/n^2$).

   1) Un átomo de hidrógeno se encuentra, en el instante $t = 0$, en el estado

   ... que ... va en kets y el espacio de representación en bra

   $L^2|m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m...)}$

   $$\Psi_1 = \Phi_1 \chi_1$$

   $$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[\Phi_{320} + i\Phi_{210} - \Phi_{21-1}]$$

   L^2

   L_z

   $$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   $L_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$

   que incluye el efecto del espin del electrón.

   (a) Hállense los valores medios, en $t = 0$ de la energía, el cuadrado del momento angular orbital y su tercera componente y la tercera componente del espín.

   (b) Evalúese la incertidumbre en la energía.

   (c) En $t = 0$, se miden, simultáneamente, todas esas magnitudes: especifíquese qué valores se obtendrán y evalúense las correspondientes probabilidades.

   (d) Supóngase que se mide solamente L_z en $t = 0$, y que se obtiene cero como resultado: hállese el estado que representa al atomo tras la medición.

   2) Supóngase que, en el instante t, dicho átomo esta representado por un estado $\Psi_2 = \Psi_2(t)$ del cual se tiene la siguiente información:

   (i) Ψ_2 es autoestado de L_z y S_y con autovalores $-\hbar$ y $-\hbar/2$, respectivamente;

   Simultáneos: comparten los mismos autoestados.

   (ii) la probabilidad de que, estando el átomo en el estado Ψ_2, pueda estar simultaneamente en el estado Ψ_1 del apartado 1) es $1/9$;

   (iii) los valores posibles de la energia son E_2 y E_3 solamente;

   $A|a,b\rangle = a|a,b\rangle$

   (iv) el valor medio de L^2 es $16\hbar^2/6$.

   $B|a,b\rangle = b|a,b\rangle$

   Hállese $\Psi_2(t)$, asi como el valor medio de la energia en dicho estado.

   Puede ser útil: Las matrices de Pauli son

   $S_x = |+\rangle + |-\rangle$

   $$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Hallar el resultado de la acción del operador $L_+ = L_x + iL_y$ sobre el autoestado $|LM\rangle$ de los operadores L^2 y L_z.

   $L^2|\psi\rangle = \hbar^2 l(l+1)|\psi\rangle$

   $L_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle$

· $L_{\pm}|n,l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$

3. Considerar una partícula de masa m sin espín en una caja cuadrada bidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L \\ +\infty & \text{para todo otro caso} \end{cases}$$

Tomando en cuenta la perturbación débil definida por el potencial

$$V(x,y) = V_0 L^2 \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

(a) evaluar la energía del estado fundamental a primer orden en teoría de perturbaciones;

(b) obtener la expresión para los cambios de energía del primer estado excitado a primer orden.

(c) Cuál es la diferencia en energía para los niveles en el punto $(x_0, y_0) = (L/4, L/4)$?

(d) Para el primer estado excitado, encontrar los valores de (x_0, y_0) para cuales los niveles de energía permanecen degenerados.

$$|\phi_2(t)\rangle = \alpha e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\phi_{21-1}\rangle + \beta e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}|\phi_{32-1}\rangle + \gamma e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}|\phi_{31-1}\rangle$$

$$H\psi_1 = H\frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_{320} + i\phi_{210} - \phi_{21-1}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}H\phi_{320} + iH\phi_{210} - H\phi_{21-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(E_3\phi_{320} + iE_2\phi_{210} - E_2\phi_{21-1})$$

$$H|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(E_3|\phi_{320}\rangle + iE_2|\phi_{210}\rangle - E_2|\phi_{21-1}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi_1|H|\psi_1\rangle = \frac{1}{3}(E_3 + E_2 + E_2) = \frac{1}{3}(E_3 + 2E_2)$$

$$\left(\begin{matrix}\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle \\ \langle\psi_1|H|\psi_1\rangle\end{matrix}\right)$$

$$|\psi_1\rangle = |\varphi_1\chi_1\rangle = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ -\varphi_1\end{pmatrix}$$

$$\langle\psi_1| = \langle\varphi_1\chi_1| = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ -\varphi_1\end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$