

## Elementos de Astrofísica Teórica

Primera Fecha: 15-12-2016

1. (a) Utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático y considerando que el gas que compone el sol se comporta como un gas ideal clásico, estime los valores para las presiones, densidades y temperaturas típicas del interior del sol.

$$\rho = \alpha e$$

(b) ¿Es posible considerar al gas de electrones de una estrella como el sol como un gas ideal clásico? Utilice los valores estimados en el punto anterior para justificar su respuesta.

(c) ¿Es posible sostener la estructura de la estrella con la presión que ejercen los fotones? Justificar y discutir los resultados.

Sugerencia: Estime la densidad numérica de electrones de una estrella como el sol y con este valor estime la energía de Fermi (suponiendo un gas no relativista) y su temperatura asociada.

2. (a) ¿Qué tipo de estructuras describe la ecuación de Lane-Emden?

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0.$$

Explique a partir de qué ecuaciones se obtiene y cuál es (o fue) su utilidad.

(b) Resuelva la ecuación para el caso  $n = 0$  bajo las condiciones de contorno  $\theta(0) = 1$  y  $\frac{d\theta}{d\xi}|_0 = 0$ . ¿Qué representa esta polítropa? ¿Cómo encontraría el radio y la masa total del objeto? (Recuerde que  $r = \alpha\xi$ ,  $\rho = \lambda\theta^n$ ).

3. (a) Bajo la aproximación de capas planas y paralelas, obtener la ecuación integral para  $I_\nu$ , conocida como "Solución Formal de la Ecuación de Transporte":

$$I(\tau_1) = I(\tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S e^{-(\tau - \tau_1)/\mu} \frac{d\tau}{\mu}.$$

(b) Suponiendo que la función fuente ( $S$ ) está dada por la ley de Planck y que vale la estratificación de la temperatura  $[T(\tau)]$  de la atmósfera gris bajo la aproximación de Eddington,

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{ef}}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right),$$

demostrar que la función fuente entonces cumple que

$$S(\tau) = a + b\tau$$

(c) Con este resultado, mostrar que la intensidad emergente en el caso de una atmósfera semi-infinita cumple que

$$I(0, \mu) = a + b\mu.$$

4. Para un universo de 'polvo' (materia fría) se obtuvo en la teoría la ecuación que determina la evolución de  $a$ , la cual puede escribirse como

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \frac{\Omega}{a} = H_0^2 (1 - \Omega) \quad (1)$$

donde  $\Omega$  está determinado por el contenido de materia y es  $\Omega = \rho_{\text{hoy}} / \rho_c$  con  $\rho_c$  una densidad crítica cuyo valor es  $\rho_c = 3H_0^2 / (8\pi G)$ . El valor actual de  $a$  suele elegirse como  $a_{\text{hoy}} = 1$ .

- a) ¿A partir de qué ecuación y bajo qué hipótesis sobre el universo fue posible deducir dicha expresión? ¿Qué significa  $a(t)$  y cómo se relaciona con la posición de un dado elemento de fluido?
- (b) Resuelva la evolución del universo utilizando la ecuación (1) para un universo de polvo ( $\rho = \rho_{\text{hoy}} a^{-3}$ ) con densidad crítica ( $\Omega = 1$ ) y muestre que cumple

$$a = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \Omega = 1$$

- (c) Graficar  $a$  en función de  $H_0 t$  e interpretar físicamente. ¿Qué tipo de geometría describe y cuánto vale la velocidad de expansión del universo a tiempo infinito?