Álgebra Lineal. Examen Final 19/3/14

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS. UNLP

---

1. Sean V y W dos K-espacios vectoriales

   a) Si V y W tienen dimensión finita, B_1 base de V y B_2 base de W,

   Explicar qué es la matriz de T en las bases $B_1 B_2$ y cómo se puede obtener a partir de ella la matriz en otras bases $B_1' B_2'$ (B_1' base de V y B_2' base de W)

   b) Dada la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuyo núcleo es

   $Nu(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ y $T(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$.

   Hallar usando c) la matriz correspondiente a T en la base canónica

2. a Definir transformación lineal $T : V \to W$ (V,W espacios vectoriales sobre K). Dar un ejemplo de una transformación lineal y otra no lineal ← ver el no + l

   b) Probar que si V tiene dimensión n, entonces existe un isomorfismo $f : V \to K^n$.

3. En el espacio euclídeo de funciones reales y continuas definidas sobre $[1, 2]$ se define el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$

   Obtener una base ortonormal $B^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ de P_2 (el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a 2) a partir de $B = \{1, x, x^2\}$

4. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal con matriz asociada A respecto a la base canónica, u y $v \in \mathbb{R}^n$ autovectores asociados a los autovalores λ y μ. Indicar justificando cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

   a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el vector αu es un autovector asociado a λ — $\alpha = 0 \to \alpha u = 0$ no es autovector

   b Todo vector del núcleo es autovector → vector nulo en núcleo

   c) El vector $w = v + u$ es autovector de T

   d λ^n es autovalor de T^n con autovector asociado u

   e Una matriz diagonalizable es invertible (hecho)

$\exists \gamma \quad T(w) = \gamma w$

$Tu = \lambda u$

$Tv = \mu v$

$Au = \lambda u$

$A\lambda u = \lambda\lambda u$

$\lambda^2 \mu = AAu = A\lambda u = \lambda\lambda u = \lambda^2 u$