A diagonalizable / λ autovalor — λ autovalor de A — $A v = \lambda v = (A - \lambda I)\underset{\neq 0}{v} = 0 \to |A - \lambda I| = 0$

Algebra Lineal. Examen Final 20/12/13

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRONOMICAS Y GEOFISICAS. UNLP

---

1. Indicar, justificando, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones
   a. No hay aplicaciones inyectivas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
   b. Las relaciones $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,-1,1) = (-1,-2)$ y $T(0,0,2) = (3,6)$ definen un epimorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$
   c. Todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ son epimorfismos
   d. Si V y W son de dimensión finita (m y n respectivamente), $Hom_K(V,W)$ es isomorfo a $M_{m,n}(K)$, el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con coeficientes en K.

2. Sea V el espacio vectorial de las matrices de 2×2 sobre $\mathbb{R}$ y sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Hallar la matriz correspondienta a $T(A) = M.A$ en la base canónica.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Analizar para qué valores de α y β la matriz es diagonalizable.

4. En el espacio euclídeo de funciones reales y continuas definidas sobre $[1,2]$ se define $\langle f,g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$. Considerando el subespacio $P_2(x)$ de polinomios de grado ≤ 2 en la indeterminada x
   a. Indicar para qué valores de a los polinomios $x - a$ y $x + a$ son ortogonales
   b. Explicar cómo encontraría una base ortonormal a partir de $B = \{1, x, x^2\}$.

3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿ $\alpha, \beta \to A$ diagonalizable ?

$\det(A - \lambda I_n) = 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \alpha-\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = \alpha \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\lambda-\alpha \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \beta \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}}_{0}$$