Final Algebra Lineal - Observatorio

Agosto 2012

1. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial con $\dim_K \mathbb{V} = n$. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y $v \in \mathbb{V}$ tales que $Z(v, T) = \mathbb{V}$.

   a) Mostrar que si U, $V \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ son tales que conmutan con T y tales que $Uv = Vv$ entonces $U = V$.

   b) Mostrar que si $U \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ conmuta con T entonces existe $p \in K[x]$ tal que $U = P(T)$.

2. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial, $\dim_K(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$. Probar:

   a) $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}$ es un hiperespacio si y solo si existe $f \in \mathbb{V}^*$ no nulo tal que $\mathbb{W}_1 = \ker(f)$.

   b) Si $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}$ es subespacio entonces $\dim_K(\mathbb{W}_2)+ \dim_K(\mathbb{W}_2^o) = n$.

   c) Si $\mathbb{W}_3 \subset \mathbb{V}$ es subespacio y $\dim_K(\mathbb{W}_3) = k$ con $1 \leq k \leq n-1$, entonces existen $(n-k)$ hiperespacios de $\mathbb{V}$ cuya intersección es $\mathbb{W}_3$.

3. Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un K-espacio vectorial con producto interno, $\dim_K(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$. Sea $W \subset \mathbb{V}$ un subespacio y sea $v \in \mathbb{V}$. Probar:

   a) Existe un único vector $w_0 \in W$ tal que $\|v - w_0\| \leq \|v - w\|$ para todo $w \in W$;

   b) Si w_0 es el vector del ítem anterior entonces $v - w_0 \in W^\perp$.

   Más aún, si suponemos que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ortonormal de W entonces verificar que $w_0 = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle \, u_i$.

4. Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, $\dim_\mathbb{R}(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$, y sea $\mathcal{B} \in \mathrm{Bil}(\mathbb{V})$ una forma bilineal simétrica.

   a) Probar que existe una base ortonormal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que si $v \in \mathbb{V}$ está dado por $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i$ entonces

   $$\mathcal{B}(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; \alpha_i^2 \, .$$

   b) Mostrar que la forma cuadrática asociada a $\mathcal{B}$ es definida positiva si y solo si $\lambda_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$ en la representación del item a). Deducir que en el caso en que la f.c. es definida positiva, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}(v, v) \geq \delta \, \|v\|^2$, $\forall \, v \in \mathbb{V}$.