1. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**

   Análisis integral. Para cada una de las siguientes EDOs, indique: orden, linealidad, tipo de coeficientes, y si tiene término independiente. Sólo en caso de ser una ecuación de primer orden, indique si es homogénea (y demuestre), luego resuelva, dejando explícito el método de resolución utilizado y los puntos en los cuales encuentra problemas (en caso de tratarse de posibles soluciones, aclare si efectivamente las descarta como tales). Al encontrar la solución, si la deja en su formato implícito, aclárelo. Finalmente, de tratarse de un problema de valores iniciales, indicar tanto la solución general como la particular.

   (a) (½ puntos) $y'' + \cos(x+y) - cos(x) = 0$;

   (b) (1 puntos) $y' - e^{2x} - y = -1$ con $y(0) = 1$.

2. **Sistemas**

   (a) (2 puntos) *Estabilidad.* Resuelva el PVI, explicitando la matriz fundamental, y grafique las soluciones identificando la dirección de los autovectores. Reinterprete como un análisis de estabilidad del origen y consecuentemente clasifique.

   $$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} \text{ con } \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   (b) (1½ puntos) *Inhomogéneas.* Resuelva haciendo uso del *método de variación de parámetros*:

   $$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. (1½ puntos) **Series**

   Ordinarios. Resuelva la ecuación de Legendre:

   $$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0 \text{ con } \ell \in \mathbb{N},$$

   demuestre que la solución general está compuesta por una serie infinita y un polinomio de grado ℓ, y determine las regiones de convergencia de las soluciones.

4. (1½ puntos) **Fourier**

   Identidad. Haga uso de las series de Fourier para demostrar la siguiente identidad:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

   a partir del desarrollo de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

5. (2 puntos) **Ecuaciones Diferenciales Parciales**

Difusión del calor. Resuelva e interprete físicamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $u(x,0) = f(x)$ la condición inicial, para el siguiente problema mixto: $u(-L,t) = u(L,t)$ y $u_x(-L,t) = u_x(L,t)$.