Elementos de Astrofísica Teórica

Segunda Fecha: 02-08-2016

1. A partir de la ecuación de movimiento del un fluido autogravitante:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \phi,$$

Encuentre
(a) La ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula suponiendo simetría esférica
(b) Despreciando el término de la presión y suponiendo una densidad constante, verifique que la ecuación de movimiento es la de un oscilador armónico de frecuencia $\Omega^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{3}$
(c) El tiempo característico de colapso, o caída libre (Ayuda: ese tiempo puede definirse como un cuarto del período de oscilación. ¿Por qué?). Estime su valor para el caso de una estrella de tipo solar. Compare ese tiempo con el tiempo evolutivo de ese tipo de estrella ($t_{\rm ev} \approx 10^{10}$ años). ¿Qué puede decirse sobre la hipótesis de equilibrio hidrostático?

2. (a) Encuentre la ecuación de estado de un gas de electrones completamente degenerado ($T = 0$) en el límite ultra-relativista. Recuerde que $\epsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$, $v = \partial\epsilon/\partial p$, $P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n(p)\, p\, v\, dp$, y $n = \int_0^\infty n(p)dp$, donde $n(p) = (g/h^3)4\pi p^2 f(p)dp$, y $f(p) = \frac{1}{e^{(\epsilon(p)-\mu)/kT}+a}$, con $a = 0, 1, -1$ dependiendo de la estadística. Indique si se trata de una ecuación politrópica. En caso de serlo, ¿qué índice politrópico le correspondería? Justificar la respuesta.
(b) Estime la presión que ejercen los iones en el caso de enanas blancas (con M $\sim$ M$_\odot$, R$\sim$ R$_\oplus$, T $\sim 10^7$ K), suponiendo que sólo están compuestas por carbono. ¿Es posible sostener la estructura de la enana blanca con la presión que ejercen los iones? Justifique. (Ayuda: use la ecuación de equilibrio hidrostático para encontrar una estimación de la presión y luego compare este valor con la presión ejercida por lo iones). ¿Qué puede decirse de la presión que ejercen los electrones degenerados?

3. Asumiendo que la intensidad específica del campo de radiación en el interior estelar puede escribirse como:

$$I = I_0 + I_1 \cos\theta + I_2 \operatorname{sen}\theta$$

Encuentre las expresiones de I_0, I_1 y I_2 en términos del flujo, la presión de radiación y la densidad de energía. (Ayuda: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ si $f(x)$ es una función impar). Recuerde las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, d\mu \qquad (1) \\ F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu\, d\mu \\ P_\nu &= \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, \mu^2\, d\mu \end{aligned}$$

donde la variable $\mu = \cos\theta$ y θ es el ángulo cenital.

4. Para un universo de 'polvo' (materia fría) se obtuvo en la teoría la ecuación que determina la evolución de a, la cual puede escribirse como:

$$\dot{a}^2 - {H_0}^2\frac{\Omega}{a} = {H_0}^2(1-\Omega) \qquad (2)$$

donde Ω está determinado por el contenido de materia y es $\Omega = \rho_{\text{hoy}}/\rho_{\text{c}}$, con ρ_{c} una densidad crítica cuyo valor es $\rho_{\text{c}} = 3{H_0}^2/(8\pi G)$. El valor actual de a suele elegirse como $a_{\text{hoy}} = 1$.

a) ¿A partir de qué ecuación y bajo qué hipótesis sobre el universo fue posible deducir dicha expresión? ¿Qué significa $a(t)$?

(b) Resuelva la evolución del universo utilizando la ecuación (2) para un universo de polvo ($\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$) con una densidad crítica ($\Omega = 1$) y muestre que cumple

$$a = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad\qquad \Omega = 1$$

(c) Graficar esquemáticamente a en función de t e interpretar físicamente. ¿Qué tipo de geometía describe y cuánto vale la velocidad de un elemento de fluido a $t \to \infty$?