MATEMATICAS ESPECIALES I
PRIMER PARCIAL - 2da fecha - 7 de junio de 2016

Ejercicio 1.

a) Considere la sucesión de números complejos dada por

$$z_n = 2i + \frac{i^n}{n^3 + 3n + 1}, \quad n \geq 1.$$

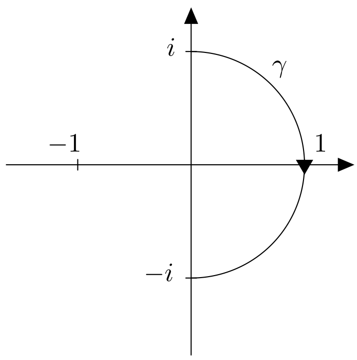
Determinar si dicha sucesión converge. En caso afirmativo proponer un valor para el límite y probar que la sucesión converge a ese valor utilizando la definición de límite.

b) Probar que la siguiente serie converge absolutamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + ni}{i + n^3}$$

(**Sugerencia:** Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)

Ejercicio 2. La figura de la derecha muestra una semicircunferencia γ que une los puntos i y $-i$:



a) Encontrar una parametrización para γ.

b) Escoger una rama para la función $f(z) = \ln(z)$ que resulte continua sobre el recorrido de γ y tal que $f(1) = 2\pi i$. Indicar explícitamente el dominio de f y dar una fórmula para su cálculo.

c) Utilizando la parametrización del primer inciso calcule

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si} \quad Im(z) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad Im(z) < 0 \end{cases}$$

Determinar el dominio de derivabilidad y analiticidad. En los puntos donde f resulte derivable calcular la derivada.

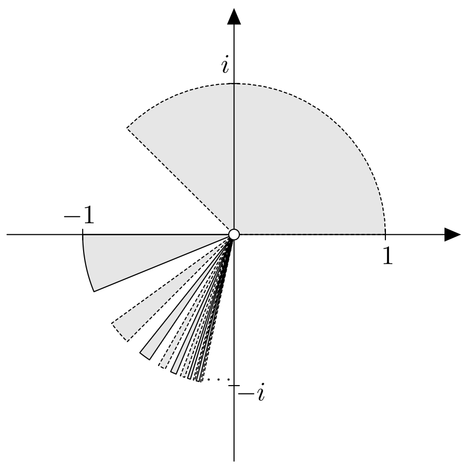
Ejercicio 4. Considere el subconjunto $\mathcal{S}$ del plano complejo representado en la siguiente figura (ver la observación final para una definición formal de $\mathcal{S}$):

a) Mostrar que $z_1 = \frac{1+i}{2}$ es un punto interior de $\mathcal{S}$ y que $z_2 = 0$ es punto de acumulación de $\mathcal{S}$.

b) Describir los puntos frontera $z \in \partial\mathcal{S}$ tales que $Re(z) = 0$.

c) ¿Es $\mathcal{S}$ un conjunto conexo? Justificar.

d) Si $\mathcal{S}$ es conexo, remover un punto para que quede disconexo. Si es disconexo agregar un punto para que quede conexo. En cada caso justificar.



Observación. Definiendo los conjuntos

$$S_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1 \wedge \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) \frac{3}{2}\pi < \arg(z) < \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \frac{3}{2}\pi \right\}, \quad \text{si } k \text{ es impar}$$

y

$$S_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| \leq 1 \wedge \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) \frac{3}{2}\pi \leq \arg(z) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \frac{3}{2}\pi \right\}, \quad \text{si } k \text{ es par}$$

puede verse que

$$\mathcal{S} := \bigcup_{k \geq 1} S_k.$$