MATEMATICAS ESPECIALES I
PRIMER PARCIAL - 24 de mayo de 2016

Ejercicio 1.

a) Utilizando la definición de límite de una sucesión, probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ni^n}{n^2+\pi} = 0$$

b) Decidir si la siguiente serie converge abslutamente o no

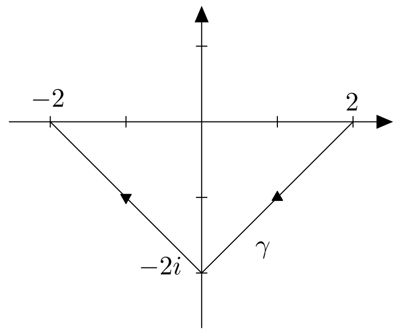
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{4}\right)^{n!}$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \cos(\bar{z})$.

a) Parametrice la curva γ representada en la figura de la derecha.

b) Utilice la parametrización del inciso anterior para calcular

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

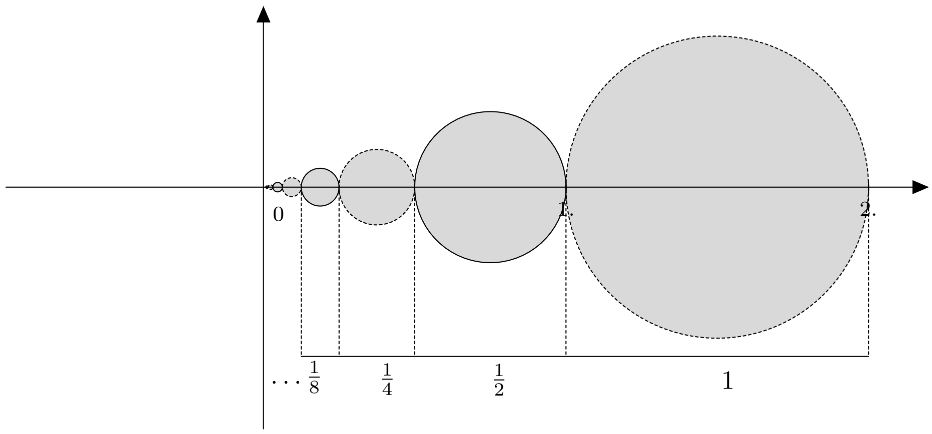


Ejercicio 3. Considere la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = f(x+yi) = \sqrt{|xy|}$$

Determine el dominio de derivabilidad y el de analiticidad. Justificar.

Ejercicio 4. Considere el subconjunto $\mathcal{S}$ del plano complejo representado en la siguiente figura (ver la observación final para una definición formal de $\mathcal{S}$):



a) Mostrar que $z_1 = \frac{3+i}{2}$ es un punto de acumulación de $\mathcal{S}$ y que $z_2 = \frac{3}{4}$ es interior a $\mathcal{S}$.

b) ¿Existen puntos frontera reales que *no* pertenzcan a $\mathcal{S}$? Si la respuesta es sí decir cuáles son y justificar por qué son puntos frontera.

c) ¿Es $\mathcal{S}$ un conjunto conexo? Justificar.

d) Si $\mathcal{S}$ es conexo, remover un punto para que quede disconexo. Si es disconexo agregar un punto para que quede conexo. En cada caso justificar.

Observación. Definiendo los conjuntos

$$D_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_k| < \frac{1}{2^{k+1}} \right\} \qquad \text{si } k \text{ es par o } 0$$

y

$$D_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}} \right\} \qquad \text{si } k \text{ es impar,}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k+1}},$$

puede verse que

$$\mathcal{S} := \bigcup_{k \geq 0} D_k.$$