Final de Algebra

31 de Marzo del 2016

1. *a*) Demostrar que si a y b son números enteros, para m natural no nulo, $a \equiv_m b \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo resto al dividirlos por m.

   b) Dar una regla de divisibilidad por 9. Justifique.

2. *a*) Decir si es V ó F:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

   b) Demostrar que la suma de las raices n-ésimas es nula.

3. V ó F. Justifique.
   Dado $P(x)$ con sus coeficientes reales,

$$\alpha \in \mathbb{C}/P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$$

4. V ó F. Justifique.

   a) Si $A \in \mathrm{K}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$ y $A^3 = 0 \Rightarrow A$ no es invertible

   b) Si $A, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{n} \times \mathrm{n}}$ y $A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$

   c) Si A es quivalente por filas con $B \Rightarrow B$ es equivalente por filas con A.

5. Sea V un espacio de dimensión finita sobre K. Sean U y W subespacios de V. Demostrar:

$$dim_K(U + W) = dim_K U + dim_K W - dim_K(U \cap W)$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tal que $A = [T]_{B_1 B_2}$, siendo $T : \mathbb{R}_5[\mathrm{x}] \to \mathbb{R}^5$ y B_1 y B_2 las bases canónicas correspondientes a cada espacio.

   a) Hallar $Nu(T)$ y $Im(T)$, dando en cada caso una base.

   b) ¿Es T invertible? Justifique.