Notas sobre tensores

Algebra Lineal - Observatorio

Introducción

Estas notas están pensadas como una introducción elemental a la teoría de tensores, desde un punto de vista "coordenado". De esta forma, no desarrollamos el producto tensorial de espacios vectoriales sino que introducimos la noción de tensor de forma aislada para después ponerla dentro de un contexto más genérico.

Para la comprensión completa de este material , el lector deberá realizar los ejercicios que están entre el texto de la teoría (pues en ellos se desarrollan varios puntos teóricos adicionales). En la parte final, se detalla una lista de ejercicios adicionales para la completar la práctica de este tema.

1. Ejemplos de tensores

Comenzamos con una serie de ejemplos sobre tensores, en los cuales fijamos una notación conveniente para el desarrollo de estas notas. Más adelante damos la definición formal y los resultados básicos de la teoría de tensores. Por simplicidad vamos a suponer que los cuerpos considerados son $k = \mathbb{Q}$, ó $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

1.1. Funcionales lineales sobre $\mathbb{V}$

Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$, con base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sea $f \in \mathbb{V}^*$ un funcional lineal y sea

$$v = \alpha^1 \, v_1 + \ldots + \alpha^n \, v_n$$

un vector $v \in \mathbb{V}$ (notamos el índice de la coordenada arriba; la conveniencia de esta notación se verá más adelante). Luego

$$f(v) = k_1 \, \alpha^1 + \ldots + k_n \, \alpha^n \, ,$$

donde $k_i = f(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Consideremos una nueva base $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ y consideremos las representaciones lineales

$$w_i = c_i^1 \, v_1 + \ldots + c_i^n \, v_n = \sum_{l=1}^{n} c_i^l \, v_l \, , \quad i = 1, \ldots, n.$$

De esta forma construimos la matriz cambio de base

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix} \, ,$$

donde convenimos en emplear el índice superior para indicar la fila y el inferior para indicar la columna. Recordemos que en este caso, la matriz de cambio base $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de la base B'

en la base B es inversible y su inversa está dada por $M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, es decir la matriz de cambio de base de la base B en la base B'.

Supongamos que en la base $\mathcal{B}'$ se tiene $v = \sum_{l=1}^{n} \beta^l w_l$; en este caso

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \beta^i \tag{1}$$

donde

$$h_i = f(w_i) = f(\sum_{l=1}^{n} c_i^l \, v_l) = \sum_{l=1}^{n} c_i^l \, k_l \, , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Notación 1.1. Convengamos ahora en abreviar las notaciones siguiendo la regla de Einstein: si en una expresión cualquiera se repite dos veces, una arriba y otra vez abajo, un mismo índice - digamos i - esto significa que se realiza la sumación respecto a este índice - en este caso i - en los correspondientes límites de sumación ($i = 1, \ldots, n$). De esta forma omitimos el signo de sumatoria "$\sum_{i=1}^{n}$".

Por ejemplo, según la convención anterior se tiene:

$$c_i^l \, v_l = \sum_{l=1}^{n} c_i^l \, v_l \, , \quad c_i^l \, \alpha^i = \sum_{l=1}^{n} c_i^l \, \alpha^i \, , \quad b_l^{p\,q} \, a_p^l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} b_l^{p\,q} \, a_p^l.$$

En particular, las identidades (1),(1) se escriben

$$f(v) = h_i \, \beta^i \, , \quad h_i = c_i^l \, k_l \, .$$

Por otro lado, con las notaciones anteriores se tiene: $[f]_{\mathcal{B}} = (k_i)_{i=1}^n$, $[f]_{\mathcal{B}'} = (h_i)_{i=1}^n$ y vale la relación

$$[f]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}. \tag{3}$$

Notemos que de esta forma estamos considerando las representaciones matriciales de los funcionales como *vectores fila*.

1.2. Vectores de $\mathbb{V}$

Con las notaciones anteriores, dada la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$, todo vector $v \in \mathbb{V}$ queda representado por sus coordenadas $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. En la base $\mathcal{B}'$ este mismo vector se representa por las coordenadas $[v]_{\mathcal{B}'} = (\beta^1, \ldots, \beta^n)$ y las relaciones entre estos dos vectores de coordenadas está dada por la matriz de cambio de base

$$\alpha^l = c_i^l \, \beta^i.$$

Claro que para calcular las coordenadas $[v]_{\mathcal{B}'}$ en términos de $[v]_{\mathcal{B}}$ necesitamos la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (como hemos visto en la teoría). De esta forma, recordemos que se tiene

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}. \tag{4}$$

Los dos ejemplos considerados (el de funcional lineal y el de vector) tienen algo en común que permite incluirlos dentro de una definición más general. Dada una base, tanto un funcional como un vector quedan determinados por n coeficientes (coordenadas), de forma que al pasar a una nueva base estos coeficientes se transforman linealmente (a través de la matriz de cambio de base). Los coeficientes de una funcinal lineal así como los de un vector son ejemplos de *tensores*, entendiendo por un tensor una familia de n-uplas de coeficientes que representan coordenadas en alguna base y que se transforman linealmente al cambiar una base por otra.

Es claro que, con respecto al espacio vectorial $\mathbb{V}$ los vectores y funcionales son entidades bien distintas. El hecho de que se trate de objetos distintos queda de manifiesto en la forma diferente (comparar las ecuaciones (3) y (4)) de pasar de un sistema de coordenadas a otro.

Mencionamos que ambos ejemplos son de tensores *univalentes* ya que se determinan por un sistema de números que dependen de un índice.

1.3. Transformaciones lineales

Como antes, sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$, con base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Consideremos ahora un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Entonces T queda representado, con respecto a la base $\mathcal{B}$ por su matriz $[T]_{\mathcal{B}} = (a^i_j)^n_{i,j=1} \in k^{n\times n}$ (recordemos que, según hemos convenido, el índice superior indica las filas y el inferior las columnas de la matriz de T). Al pasar la base $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ entonces la matriz de T cambia según

$$[T]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,, \tag{5}$$

donde $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (c^i_j)$, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (b^i_j) \in k^{n\times n}$ son las matrices de cambio de base y $[T]_{\mathcal{B}'} = (d^i_j) \in k^{n\times n}$ es la matriz de T en la base $\mathcal{B}'$. La fórmula en (5) también puede escribirse como

$$d^i_j = b^i_l\, a^l_t\, c^t_j \tag{6}$$

donde hemos utilizado la convención de Einstein y omitido dos signos de sumatoria (cuales?!)

Por consiguiente, un operador lineal T se determina en una base dada mediante un sistema formado por n^2 coeficientes a^i_j que dependen de dos índices, el superior y el inferior, y que al pasar a una nueva base se transforman según la fórmula (6). Tenemos ahora un ejemplo de tensor, que en este caso es de valencia dos (pues depende de dos índices). Además notemos la conveniencia de que un índice sea superior y el otro inferior (que se ve reflejada en la sencillez de la fórmula (6)).

2. Definición y propiedades elementales de un tensor

Definición 2.1 (Tensor)**.** *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Supongamos que para toda base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ se tienen n^{p+q} coeficientes $a^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}(\mathcal{B})$ con $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ y $1 \le j_1, \ldots, j_p \le n$ tal que, al considerar otra base $\mathcal{B}'$ vale la relación*

$$a^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}(\mathcal{B}') = b^{i_1}_{l_1} \cdots b^{i_q}_{l_q} \cdot a^{l_1\ldots l_q}_{t_1\ldots t_p}(\mathcal{B}) \cdot c^{t_1}_{j_1} \cdots c^{t_p}_{j_p},$$

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (c^i_j)$, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (b^i_j) \in k^{n\times n}$ son las matrices de cambio de base. Decimos entonces que la familia de coeficientes $a^{i_1\ldots i_q}_{j_1\ldots j_p}(\mathcal{B})$ forma un **tensor** *$(p+q)$***-valente** *p***-covariante y** *q***-contravariante***.*

Un escalar, es decir, una magnitud que tiene el mismo valor en todos los sistemas de coordenadas puede ser considerado un tensor de valencia nula.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un operador lineal. A partir de T construimos un tensor 1-covariante 1-contravariante como sigue. Para cada base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ consideramos $[T]_{\mathcal{B}} = (a^i_j)^n_{i,j=1}$ y definimos $a^i_j(\mathcal{B}) = a^i_j$, $1 \le i, j \le n$. Entonces la ecuación (6) en la sección 1.3 muestra que la familia así definida es un tensor de la estructura mencionada.

De forma análoga, un vector induce (puede considerarse como) un tensor 1-contravariante 0-covariante (que llamaremos simplemente 1-contravariante) - a partir de sus coordenas en bases - y un funcional induce un tensor 1-covariante - a partir de sus n valores en los elemetos de las bases (ver las ecuaciones (3) y (4)).

Ejercicio 2.3. Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ y sea $\mathcal{A} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to k$ una forma bilineal. Para cada base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ y para cada $1 \leq j_1, j_2 \leq n$ consideramos $a_{j_1 j_2}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(v_{j_1}, v_{j_2}) \in k$. Probar que de esta forma $\mathcal{A}$ induce un tensor 2-covariante (0-contravariante). (Sugerencia: utilizar la fórmula de cambio de base para las formas bilineales).

Observación 2.4 (Como construir tensores)**.** Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{V}$. Sean $a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q} \in k$, $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$. Entonces definimos un tensor $(p+q)$-valente p-covariante y q-contravariante de la siguiente forma: si $\mathcal{B}'$ es otra base de $\mathbb{V}$ entonces

$$a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}') := b_{l_1}^{i_1} \cdots b_{l_q}^{i_q} \cdot a_{t_1 \ldots t_p}^{l_1 \ldots l_q} \cdot c_{j_1}^{t_1} \cdots c_{j_p}^{t_p} \tag{7}$$

donde $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (c_j^i)$, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (b_j^i) \in k^{n \times n}$ son las matrices de cambio de base (donde la expresión de la izquierda es, por definición, la expresión que figura a la derecha).

Veamos que esta definición corresponde a un tensor: en efecto, si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases de $\mathbb{V}$ entonces se verifican las identidades

$$a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}_1) := b_{l_1}^{i_1} \cdots b_{l_q}^{i_q} \cdot a_{t_1 \ldots t_p}^{l_1 \ldots l_q} \cdot c_{j_1}^{t_1} \cdots c_{j_p}^{t_p} \tag{8}$$

donde $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = (c_j^i)$, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = (b_j^i) \in k^{n \times n}$ y

$$a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}_2) := d_{l_1}^{i_1} \cdots d_{l_q}^{i_q} \cdot a_{t_1 \ldots t_p}^{l_1 \ldots l_q} \cdot e_{j_1}^{t_1} \cdots e_{j_p}^{t_p} \tag{9}$$

donde $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = (e_j^i)$, $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}} = (d_j^i) \in k^{n \times n}$. Deseamos verificar la relación

$$a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}_1) := f_{l_1}^{i_1} \cdots f_{l_q}^{i_q} \cdot a_{t_1 \ldots t_p}^{l_1 \ldots l_q}(\mathcal{B}_2) \cdot g_{j_1}^{t_1} \cdots g_{j_p}^{t_p} \tag{10}$$

donde $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = (g_j^i)$, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = (f_j^i) \in k^{n \times n}$. Pero (10) es una consecuencia de (8) y (9) junto con las identidades (verificadas en la teoría)

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}\,, \quad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$$

ó, en términos de las coordenadas (siguiendo siempre la convención de Einstein)

$$f_j^i = b_l^i \, e_j^l\,, \quad g_j^i = d_l^i \, c_j^l.$$

El tensor definido en (7) es llamado tensor *inducido* por los coeficientes $a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q} \in k$, $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$ en la base $\mathcal{B}$.

$\square$

Si dos tensores de la misma estructura tienen las mismas coordenadas con respecto a una base $\mathcal{B}$ determinada, entonces es claro que los tensores son iguales ya que al pasar a una base nueva las coordenadas se transforman de la misma manera (según la fórmula (7)).

Por ello, la construcción descripta arriba determina todos los posibles tensores de una estructura dada. Enunciamos este hecho elemental en la siguiente

Proposición 2.5. *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\mathcal{A}$ es un tensor p-variante y q-contravariante entonces existen $a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q} \in k$, $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$ tal que $\mathcal{A}$ es el tensor inducido por $a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q} \in k$, $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$ en la base $\mathcal{B}$.*

A continuación introducimos dos conceptos importantes dentro de los tensores. Para comprender el significado de estas nociones consideramos algunos ejemplos más adelante.

Definición 2.6. *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-convariante y q-contravariante y sea $\{l_1, \ldots, l_k\} \subset \{1, \ldots, q\}$ (respectivamente $\{l_1, \ldots, l_r\} \subset \{1, \ldots, p\}$). Decimos que $\mathcal{A}$ es simétrico con respecto al conjunto de super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$) si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tal que las coordenadas de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ no cambian al transponer dos cualesquiera de los super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente de los sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$).*

Ejemplo 2.7. $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Sea $\mathcal{A}$ un tensor 2-covariante y 4-contravariante. Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ entonces las coordenadas de $\mathcal{A}$ serán $a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B})$ para $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq n$.

Consideramos ahora el conjunto $\{1, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Las transposiciones de los índices con los elementos de este subconjunto son: i_1 con i_3, i_1 con i_4, i_3 con i_4 (notemos que transponer i_3 con i_1 es lo mismo que transponer i_1 con i_3 que ya fue considerada). De esta forma, para verificar que $\mathcal{A}$ es simétrico respecto de $\{1, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ se debe encontrar una base $\mathcal{B}$ en la cual se verifiquen las identidades: para todos $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq n$

$$a_{j_1 j_2}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\mathcal{B}) = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}), \; a_{j_1 j_2}^{i_4 i_2 i_3 i_1}(\mathcal{B}) = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}), \; a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_4 i_3}(\mathcal{B}) = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}).$$

Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{V}$ en donde valen las ecuaciones de arriba. Concentremos nuestra atención en una de las identidades anteriores, por ejemplo: para todos $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq n$ $a_{j_1 j_2}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\mathcal{B}) = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B})$. Sea $\mathcal{B}'$ otra base de $\mathbb{V}$ con lo cual

$$\begin{aligned}
a_{j_1 j_2}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\mathcal{B}') &= b_{l_1}^{i_3}\, b_{l_2}^{i_2}\, b_{l_3}^{i_1}\, b_{l_4}^{i_4} \cdot a_{t_1 t_2}^{l_1 l_2 l_3 l_4}(\mathcal{B}) \cdot c_{j_1}^{t_1}\, c_{j_2}^{t_2} = b_{l_1}^{i_3}\, b_{l_2}^{i_2}\, b_{l_3}^{i_1}\, b_{l_4}^{i_4} \cdot a_{t_1 t_2}^{l_3 l_2 l_1 l_4}(\mathcal{B}) \cdot c_{j_1}^{t_1}\, c_{j_2}^{t_2} \\
&= b_{l_3}^{i_1}\, b_{l_2}^{i_2}\, b_{l_1}^{i_3}\, b_{l_4}^{i_4} \cdot a_{t_1 t_2}^{l_3 l_2 l_1 l_4}(\mathcal{B}) \cdot c_{j_1}^{t_1}\, c_{j_2}^{t_2} = b_{l_1}^{i_1}\, b_{l_2}^{i_2}\, b_{l_3}^{i_3}\, b_{l_4}^{i_4} \cdot a_{t_1 t_2}^{l_1 l_2 l_3 l_4}(\mathcal{B}) \cdot c_{j_1}^{t_1}\, c_{j_2}^{t_2} \\
&= a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}')
\end{aligned}$$

donde la primer igualdad es por definición de tensor, la segunda por simetría en la base $\mathcal{B}$, la tercera es por conmutación (del primer y tercer factor en la expresión) y la cuarta es porque las variables $l_1, \ldots, l_4$ son *mudas* (o de sumación).

Con respecto a esta última afirmación, conviene notar que las expresiones (para r, s, t fijos) $a_{j_1\, t\, j_2}\, c_r^{j_1}\, c_s^{j_2}$ y $a_{j_2\, t\, j_1}\, c_r^{j_2}\, c_s^{j_1}$ coinciden, pues se tiene

$$a_{j_1\, t\, j_2}\, c_r^{j_1}\, c_s^{j_2} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_1\, t\, j_2}\, c_r^{j_1}\, c_s^{j_2} = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_2\, t\, j_1}\, c_r^{j_2}\, c_s^{j_1} = a_{j_2\, t\, j_1}\, c_r^{j_2}\, c_s^{j_1}$$

puesto que j_1 y j_2 son índices de sumación.

Notemos que en consecuencia se obtiene la igualdad: para todos $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq n$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq n$ $a_{j_1 j_2}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\mathcal{B}') = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}')$. Argumentando de forma similar podemos ver que todas las identidades anteriores se preservan, es decir: para todos $1 \leq i_1,\, i_2,\, i_3,\, i_4 \leq n$ y $1 \leq j_1,\, j_2 \leq n$

$$a_{j_1 j_2}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\mathcal{B}') = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}'),\ a_{j_1 j_2}^{i_4 i_2 i_3 i_1}(\mathcal{B}') = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}'),\ a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_4 i_3}(\mathcal{B}') = a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathcal{B}'),$$

donde $\mathcal{B}'$ es cualquier otra base de $\mathbb{V}$.

□

Como consecuencia de argumentos similares a los descritos en el ejemplo anterior (pero de escritura más técnica) se puede probar la siguiente:

Proposición 2.8. *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-convariante y q-contravariante que es simétrico con respecto a $\{l_1, \ldots, l_k\} \subset \{1, \ldots, q\}$ (respectivamente $\{l_1, \ldots, l_r\} \subset \{1, \ldots, p\}$). Entonces para toda base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ las coordenadas de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ no cambian al transponer dos cualesquiera de los super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente de los sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$).*

La propiedad enunciada en el resultado anterior es importante pues reduce el problema de la simetría al de la simetría con respecto a cualquier base conveniente de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 2.9. Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$ y sea $\mathcal{A} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to k$ una forma bilineal simétrica. Probar que el tensor 2-covariante inducido por $\mathcal{A}$ es simétrico respecto de $\{1, 2\}$.

Definición 2.10. *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-convariante y q-contravariante y sea $\{l_1, \ldots, l_k\} \subset \{1, \ldots, q\}$ (respectivamente $\{l_1, \ldots, l_r\} \subset \{1, \ldots, p\}$). Decimos que $\mathcal{A}$ es antisimétrico con respecto al conjunto de super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$) si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tal que las coordenadas de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ cambian de signo y preservan el módulo al transponer dos cualesquiera de los super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente de los sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$).*

Proposición 2.11. *Sea $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$. Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-convariante y q-contravariante que es antisimétrico con respecto a $\{l_1, \ldots, l_k\} \subset \{1, \ldots, q\}$ (respectivamente $\{l_1, \ldots, l_r\} \subset \{1, \ldots, p\}$). Entonces para toda base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ las coordenadas de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ cambian de signo y preservan el módulo al transponer dos cualesquiera de los super-índices $\{l_1, \ldots, l_k\}$ (respectivamente de los sub-índices $\{l_1, \ldots, l_r\}$).*

3. Operaciones con tensores

A continuación describimos una serie de construcciones que se pueden realizar con tensores. En lo que sigue, $\mathbb{V}$ denota un k-espacio vectorial con $\dim_k \mathbb{V} = n$.

3.1. Suma de tensores

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ dos tensores p-covariantes y q-contravariantes (es decir, de la misma estructura) de coordenadas $a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\cdot)$ y $d_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\cdot)$ respectivamente. Definimos el tensor suma $\mathcal{A}+\mathcal{D}$ de la siguiente forma. Si $\mathcal{B}$ denota una base de $\mathbb{V}$ entonces: para todos $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1,\, \ldots, j_p \leq n$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{D})_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}) = a_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}) + d_{j_1 \ldots j_p}^{i_1 \ldots i_q}(\mathcal{B}).$$

Ejercicio 3.1. Probar que la suma $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ definida arriba es un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$.

3.2. Multiplicación de tensores

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ tensores p-covariante y q-contravariante y r-covariante y s-contravariante respectivamente sobre $\mathbb{V}$. Definimos el tensor producto $\mathcal{A}\cdot\mathcal{D}$ de la siguiente forma. Si $\mathcal{B}$ denota una base de $\mathbb{V}$ entonces: para todos $1 \leq i_1, \ldots, i_{q+s} \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_{p+r} \leq n$

$$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{D})^{i_1\cdots i_{q+s}}_{j_1\cdots j_{p+r}}(\mathcal{B}) = a^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}(\mathcal{B})\cdot d^{i_{q+1}\cdots i_{q+s}}_{j_{1+p}\cdots j_{p+r}}(\mathcal{B})$$

Ejercicio 3.2. Probar que el producto $\mathcal{A}\cdot\mathcal{D}$ definido arriba es un tensor $p+r$-covariante y $q+s$-contravariante sobre $\mathbb{V}$.

Observación 3.3. La operación de multiplicación no es conmutativa. Para verificar este hecho consideramos el siguiente ejemplo de producto de dos tensores univalentes covariantes en el caso en que $n = 2$. Sean entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ tales tensores con coordenadas $a_i(\mathcal{B})$, $d_i(\mathcal{B})$, $i = 1, 2$, donde $\mathcal{B}$ denota una base de $\mathbb{V}$.

El producto $\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot\mathcal{D}$ es un tensor 2-covariante de coordenadas

$$c_{11} = a_1(\mathcal{B})\, b_1(\mathcal{B}),\ c_{12} = a_1(\mathcal{B})\, b_2(\mathcal{B}),\ c_{21} = a_2(\mathcal{B})\, b_1(\mathcal{B}),\ c_{22} = a_2(\mathcal{B})\, b_2(\mathcal{B})$$

mientras que $\mathcal{C}' = \mathcal{D}\cdot\mathcal{A}$ es un tensor 2-covariante de coordenadas

$$c'_{11} = b_1(\mathcal{B})\, a_1(\mathcal{B}),\ c'_{12} = b_1(\mathcal{B})\, a_2(\mathcal{B}),\ c'_{21} = b_2(\mathcal{B})\, a_1(\mathcal{B}),\ c'_{22} = b_2(\mathcal{B})\, a_2(\mathcal{B})\,.$$

Es claro que en general las segundas coordenadas (en las listas de arriba) no serán iguales (dar un ejemplo concreto!).

3.3. Acción de los escalares en tensores

La acción de los escalares sobre los tensores es en realidad un caso particular de la multiplicación por tensores, considerando a los escalares como 0-tensores (es decir, 0-covariante y 0-contravariante). De esta forma, si $\mathcal{A}$ es un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$ y $d \in k$ definimos el tensor $d\cdot\mathcal{A}$ a partir del producto, es decir: para todos $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$

$$(d\cdot\mathcal{A})^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}(\mathcal{B}) = d\cdot a^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}(\mathcal{B}).$$

De esta forma el conjunto de todos los tensores p-variantes y q-contravariantes sobre $\mathbb{V}$ forma un espacio vectorial con la suma y la acción por escalar antes descripta (Verificar la afirmación anterior como un ejercicio).

Ejercicio 3.4. Mostrar que la dimensión del k-espacio vectorial formado por todos los tensores p-variantes y q-contravariantes sobre $\mathbb{V}$ es n^{p+q}. Hallar una base de este espacio vectorial.

3.4. Contracción de tensor

Esta es una operación fundamental entre tensores que engloba varias operaciones del álgebra lineal. Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-covariante y q-contravariante de coordenadas $a^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}(\cdot)$. Sean $1 \leq r \leq p$ y $1 \leq s \leq q$ dos índices (uno correspondiente a los super-índices y otro a los sub-índices). Decimos que $\mathcal{A}'$ se obtiene a partir de $\mathcal{A}$ por contracción de los indices (r, s) si se verifica: para todos $1 \leq i_1, \ldots, i_{q-1} \leq n$ y $1 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq n$

$$(\mathcal{A}')^{i_1\cdots i_{q-1}}_{j_1\cdots j_{p-1}}(\mathcal{B}) = a^{i_1\cdots i_{s-1}\, l\, i_s\cdots i_{q-1}}_{j_1\cdots i_{r-1}\, l\, i_r\cdots j_{p-1}}(\mathcal{B}) \ \left(= \sum_{l=1}^{n} a^{i_1\cdots i_{s-1}\, l\, i_s\cdots i_{q-1}}_{j_1\cdots i_{r-1}\, l\, i_r\cdots j_{p-1}}(\mathcal{B}) \right),$$

donde $\mathcal{B}$ denota una base arbitraria de $\mathbb{V}$.

Ejemplo 3.5. Consideremos el caso en que $n = 2$ y $\mathcal{A}$ es un tensor 2-covariante y 1-contravariante. De esta forma, dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ entonces $\mathcal{A}$ tiene ocho coordenadas con respecto a esta base, $\mathcal{A}^i_{j\,k}(\mathcal{B})$, $1 \leq i,\, j,\, k \leq 2$. Contrayendo a este tensor con respecto a los índices 1 (superior) y 1 (inferior) se obtiene un tensor $\mathcal{A}'$ 1-contravariante de coordenadas

$$\mathcal{A}'(\mathcal{B})_1 = \mathcal{A}^1_{11} + \mathcal{A}^2_{21}, \quad \mathcal{A}'(\mathcal{B})_2 = \mathcal{A}^1_{12} + \mathcal{A}^2_{22}.$$

Por otro lado, si contraemos con respecto a 1-(superior) y 2-(inferior) se obtiene el tensor $\mathcal{A}''$ 1-contravariante de coordenadas

$$\mathcal{A}''(\mathcal{B})_1 = \mathcal{A}^1_{11} + \mathcal{A}^2_{12}, \quad \mathcal{A}''(\mathcal{B})_2 = \mathcal{A}^1_{21} + \mathcal{A}^2_{22}.$$

Ejercicio 3.6. Probar que si $\mathcal{A}'$ se obtiene a partir del tensor $\mathcal{A}$ p-covariante y q-contravariante, por contracción de los indices (r, s) es un tensor $(p-1)$-covariante y $(q-1)$-contravariante.

Ejemplo 3.7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un operador lineal sobre $\mathbb{V}$ y consideremos el tensor $\mathcal{T}$ 1-covariante y 1-contravariante inducido por T (ver Ejemplo 2.2). Si contraemos a $\mathcal{T}$ por el índice superior e inferior obtenemos un tensor 0-valente, es decir un escalar. De hecho, si $t \in k$ denota dicha contracción se tiene que

$$t = a^l_l = \sum_{l=1}^{n} a^l_l$$

que es lo que hemos llamado la traza de T. El hecho de que la traza de T sea un tensor indica que este escalar es independiente de la base en que se lo calcule!!

Frecuentemente, la operación de contracción se aplica al producto de dos tensores tomando índices en diferentes factores del producto. Veamos algunos ejemplos:

1. Sean $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ dos operadores lineales y sean $\mathcal{A} = a^i_j(\cdot)$, $\mathcal{D} = d^i_j(\cdot)$ los tensores inducidos por estos operadores sobre $\mathbb{V}$. Entonces el producto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}$ es un tensor 2-covariante y 2-contravariante. Si contraemos al producto por los índices 1-inferior y 2-superior y denotamos a esta contracción por $\mathcal{E}$ entonces

$$\mathcal{E}^i_j(\mathcal{B}) = a^i_l(\mathcal{B})\, b^l_j(\mathcal{B}),$$

   donde $\mathcal{B}$ denota una base arbitraria de $\mathbb{V}$. Es sencillo verificar que el tensor 1-covariante y 1-contravariante $\mathcal{E}$ es el inducido por el operador producto $S \cdot T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

2. Sea $\mathcal{A}$ el tensor 2-covariante inducido por una forma bilineal $A : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to k$ (de forma que $\mathcal{A}_{i\,j}(\mathcal{B}) = A(v_i,\, v_j)$, para una base arbitraria $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$). Sean $u,\, v \in \mathbb{V}$ vectores y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ los tensores 1-contravariantes que inducen. De esta forma obtenemos el producto $\mathcal{U} \cdot \mathcal{A} \cdot V$ que es un tensor 2-covariante y 2-contravariante. Contrayendo este vector dos veces obtenemos el escalar

$$u^l\, a_{l\,k}\, v^k = A(u, v).$$

3.5. Simetrización y alternación de un tensor

El proceso de *simetrizar* ó *alternar* un tensor es fundamental para las aplicaciones de esta teoría. Solo consideramos las definiciones básicas de estas construcciones. Es conveniente recordar las definiciones 2.6, 2.10

Sea $I = \{1, \dots, s\}$. En lo que sigue $\mathbb{S}_I$ denota el conjunto de todas las funciones $f : I \to I$ biyectivas. Como I es un conjunto de s elementos se deduce (es un ejercicio de álgebra I) que la cantidad de elementos de $\mathbb{S}_I$ es $s! = s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot 1$. Los elementos de $\mathbb{S}_I$ serán denotados por letras como σ, τ, etc. Notemos que si σ, $\tau \in \mathbb{S}_I$ entonces la composición $\sigma \circ \tau$, denotaremos simplemente por $\sigma\,\tau$ es también un elemento de $\mathbb{S}_I$. Más aún, la función $L_\sigma : \mathbb{S}_I \to \mathbb{S}_I$ dada por $L_\sigma(\tau) = \sigma\,\tau$ es una biyección del conjunto $\mathbb{S}_I$: en efecto, si $L_\sigma(\tau) = L_\sigma(\tau')$ entonces $\sigma\,\tau = \sigma\,\tau'$ pero entonces

$$\tau = \mathrm{id}|_I \circ \tau = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ \tau = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ \tau) = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ \tau') = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ \tau' = \tau'$$

donde $\mathrm{id}|_I$ denota la función identidad de I y σ^{-1} es la función inversa de σ (que existe pues σ es biyección). Además, L_σ es suryectiva pues dada $\tau \in \mathbb{S}_I$ entonces $L_\sigma(\sigma^{-1}\,\tau) = \tau$.

Para desarrollar de forma breve esta sección he incluido un apéndice con algunos hechos básicos de la función signo.

3.5.1. Simetrización de un tensor

Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$ con coordenadas $a^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\cdot)$ y consideremos un subconjunto $I = \{1, \dots, s\} \subset \{1, \dots, q\}$ (esta elección de I es por simplicidad) (respectivamente $J = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$) del conjunto de índices. Decimos que $\mathcal{D}$ se obtiene por simetrización de $\mathcal{A}$ con respecto a I (respectivamente a J) si

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_I} a^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}\, i_{s+1} \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B})$$

respectivamente

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_J} a^{i_1 \dots\, i_q}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(r)}\, j_{r+1} \dots j_p}(\mathcal{B}).$$

Ejemplo 3.8. Supongamos que, con las notaciones anteriores se tiene $I = \{1, 2\}$ de forma las únicos elementos de $\mathbb{S}_I$ son la identidad y la función $(1\ 2) : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ tal que $(1\ 2)(1) = 2,\ (1\ 2)(2) = 1$. Entonces

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \left(a^{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) + a^{i_2\, i_1\, i_3 \dots\, i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) \right).$$

Notemos que como consecuencia de lo anterior

$$\mathcal{D}^{i_1\, i_2\, i_3 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}^{i_2\, i_1\, i_3 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B})$$

es decir, $\mathcal{D}$ es simétrico con respecto al conjunto de índices superiores $\{1, 2\}$. Más aún, si suponemos que $\mathcal{A}$ es un tensor simétrico con respecto al conjunto de índices superiores $\{1, 2\}$ entonces $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

Ejercicio 3.9. Probar que la simetrización del tensor $\mathcal{A}$ p-covariante y q-contravariante con respecto al conjunto I (respectivamente J) es un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$.

Como conclusión del ejemplo anterior observamos que la simetrización de $\mathcal{A}$ con respecto a I produce un tensor simétrico con respecto al conjunto I. Más aún, los tensores simétricos con respecto a I no cambian al simetrizarlos con respecto a I.

3.5.2. Alternación de un tensor

Sea $\mathcal{A}$ un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$ con coordenadas $a^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\cdot)$ y consideremos un subconjunto $I = \{1, \dots, s\} \subset \{1, \dots, q\}$ (esta elección de I es por simplicidad) (respectivamente $J = \{1, \dots, r\} \subset \{1, \dots, p\}$) del conjunto de índices. Decimos que $\mathcal{D}$ se obtiene por alternación (ó anti-simetrización) de $\mathcal{A}$ con respecto a I (respectivamente a J) si

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_I} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}\, i_{s+1} \dots\, i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B})$$

respectivamente

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_J} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a^{i_1 \dots\, i_q}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(r)}\, j_{r+1} \dots\, j_p}(\mathcal{B}),$$

donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ denota la función signo de la permutación σ (ver sección 5 - Apéndice)

Ejemplo 3.10. Supongamos que, con las notaciones anteriores se tiene $I = \{1, 2\}$ de forma las únicos elementos de $\mathbb{S}_I$ son la identidad y la función $(1\ 2) : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ tal que $(1\ 2)(1) = 2,\ (1\ 2)(2) = 1$. Entonces

$$\mathcal{D}^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \left(a^{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) - a^{i_2\, i_1\, i_3 \dots\, i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) \right).$$

Notemos que como consecuencia de lo anterior

$$\mathcal{D}^{i_1\, i_2\, i_3 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = -\ \mathcal{D}^{i_2\, i_1\, i_3 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B})$$

es decir, $\mathcal{D}$ es anti-simétrico con respecto al conjunto de índices superiores $\{1, 2\}$. En particular,

$$\mathcal{D}^{i_1\, i_2\, i_3 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}(\mathcal{B}) = 0 \ \text{ siempre que } i_1 = i_2.$$

Más aún, si suponemos que $\mathcal{A}$ es un tensor anti-simétrico con respecto al conjunto de índices superiores $\{1, 2\}$ entonces $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

Ejercicio 3.11. Probar que la alternación del tensor $\mathcal{A}$ p-covariante y q-contravariante con respecto al conjunto I (respectivamente J) es un tensor p-covariante y q-contravariante sobre $\mathbb{V}$.

Como conclusión del ejemplo anterior observamos que la alternación de $\mathcal{A}$ con respecto a I produce un tensor anti-simétrico con respecto al conjunto I. Más aún, los tensores anti-simétricos con respecto a I no cambian al alternarlos con respecto a I.

4. Tensores en espacios Euclídeos

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = n$, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (espacio Euclídeo n-dimensional). Por supuesto, en este caso valen todas las consideraciones hechas hasta ahora. Veremos que en este caso los tensores tienen cierta propiedad adicional.

Recordemos que entonces, el producto escalar es en este caso una forma bilineal simétrica. Sea $\mathcal{G}$ el tensor 2-covariante inducido por el producto escalar (pensado como f.b.) y denotemos las coordenadas de $\mathcal{G}$ mediante $g_{ij}(\cdot)$. Al tensor $\mathcal{G}$ se lo llama *tensor métrico* del espacio Euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Si u, $w \in \mathbb{V}$ son vectores y $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ son los tensores 1-contravariantes inducidos por u y w respectivamente, con coordenadas $u^i(\cdot)$, $w^i(\cdot)$ entonces se verifica que

$$\langle u, w\rangle = u^i(\mathcal{B}) \cdot g_{ij}(\mathcal{B}) \cdot w^j(\mathcal{B}), \quad \text{para toda base } \ \mathcal{B}.$$

La contracción del producto del tensor métrico con el tensor $\mathcal{W}$ cuyas coordenadas son

$$w_i(\mathcal{B}) = g_{ij}(\mathcal{B})\, w^j(\mathcal{B})$$

es un tensor univalente 1-covariante. Las coordenadas de este tensor son llamadas coordenadas covariantes del vector $w \in \mathbb{V}$ (a diferencia de sus coordenadas contravariantes - usuales). Puesto que dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$$w_i(\mathcal{B}) = g_{ij}(\mathcal{B})\, w^j(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j\rangle\, w^j(\mathcal{B}) = \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} w^j(\mathcal{B})\, v_j\rangle = \langle v_i, w\rangle$$

vemos que las coordenadas covariantes de w son las proyecciones de w sobre los elementos de la base $\mathcal{B}$ (donde hemos usado la identidad $w = \sum_{j=1}^{n} w^j(\mathcal{B})\, v_j$). Así, en el caso particular de una base ortonormal (b.o.n.) $\mathcal{B}$ entonces se tiene $w_j(\mathcal{B}) = w^j(\mathcal{B})$ es decir, las coordenadas covariantes y contravariantes coinciden.

Notemos que, por propiedad básica de un tensor, si $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son bases de $\mathbb{V}$ entonces

$$g_{ij}(\mathcal{B}_1) = g_{k\,l}(\mathcal{B}_2)\, c_i^k\, c_j^l\,, \quad 1 \leq i,\, j \leq n$$

donde $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = (c_j^i)$ es la matriz cambio de base. En particular, se verifica la relación matricial

$$(g_{ij}(\mathcal{B}_1))_{i,\,j=1}^n = M^t_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}\, (g_{ij}(\mathcal{B}_2))_{i,\,j=1}^n\; M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Si $\mathcal{B}_1$ es una base arbitraria y $\mathcal{B}_2$ es una b.o.n. (que existe por ortogonalización de una base arbitraria de $\mathbb{V}$) entonces

$$(g_{ij}(\mathcal{B}_1))_{i,\,j=1}^n = M^t_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}\, M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$$

ya que $(g_{ij}(\mathcal{B}_2))_{i,\,j=1}^n$ es la matriz identidad. En particular, $(g_{ij}(\mathcal{B}_1))_{i,\,j=1}^n$ es una matriz inversible (pues es producto de matrices de cambio de base, que son inversibles).

En este caso, definimos el tensor 2-contravariante $\mathcal{G}'$ cuyas coordenadas están dadas por

$$g^{\ ij}(\mathcal{B}) = A_{ij}, \quad \text{donde} \ \ A = A(\mathcal{B}) = ((g_{ij}(\mathcal{B}))_{i,\,j=1}^n)^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

es decir, la coordenada $g^{\ ij}(\mathcal{B})$ de $\mathcal{G}'$ es la entrada (i,j) de la matriz A (que depende de $\mathcal{B}$) inversa de la matriz $(g_{ij}(\mathcal{B}))_{i,\,j=1}^n$.

Ejercicio 4.1. Probar que $\mathcal{G}'$ definido como antes es de hecho un tensor 2-contravariante sobre $\mathbb{V}$.

El tensor $\mathcal{G}'$ se llama *tensor métrico contravariante*. Notemos que entonces se tiene, por construcción de $\mathcal{G}'$ la indentidad

$$g^{ij}(\mathcal{B})\, g_{jk}(\mathcal{B}) = \delta^i_j(\mathcal{B})\,, \quad g_{jk}(\mathcal{B})\, g^{ij}(\mathcal{B}) = \delta^i_j(\mathcal{B})$$

donde $\delta^i_j(\mathcal{B})$ denotas las coordenadas del tensor 1-variante 1-contravariante inducido por el operador lineal identidad $\mathrm{id}|_{\mathbb{V}} \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

El paso de las coordenadas contravariantes del vector w a sus coordenadas covariantes se llama operación de *descenso* del índice. Para *elevar* el índice, es decir, pasar de sus coordenadas covariantes a las contravariantes observamos que tomando la contracción del producto

$$g^{ij}(\mathcal{B})\, w_j(\mathcal{B}) = g^{ij}(\mathcal{B})\, g_{jk}(\mathcal{B})\, w^k(\mathcal{B}) = w^i(\mathcal{B})$$

se recuperan las coordenadas contravariantes a partir de las covariantes.

5. Apéndice: la función signo

Sea $\mathbb{I}(n) = \{1, \ldots, n\}$ y consideremos $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{\mathbb{I}(n)}$ el conjunto de las biyecciones (permutaciones) de n elementos. Si $\sigma \in \mathbb{S}_n$ (es decir, $\sigma : \mathbb{I}(n) \to \mathbb{I}(n)$ es una función biyectiva) construimos la matriz $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\,\sigma(j)}$, $1 \leq i,\, j \leq n$.

Por ejemplo, si $\sigma \in \mathbb{S}_3$ es la permutación dada por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ entonces la matriz P_σ es

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de la matriz P_σ definimos el signo de σ, notado $\operatorname{sgn}(\sigma)$ mediante

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \det(P_\sigma).$$

Un hecho fundamental es que para toda $\sigma \in \mathbb{S}_n$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1,\, 1\}$$

En caso del ejemplo anterior es fácil ver que $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. A partir de la definición anterior se puede ver que si $\sigma,\, \tau \in \mathbb{S}_n$ entonces

$$\operatorname{sgn}(\sigma\,\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

Hay otras formas posibles de definir esta función, que dependen de ciertas descomposiciones de permutaciones.

6. Ejercicios

1. Considerar el tensor $(1-1)$ (es decir, 1-covariante, 1-contravariante) cuyas coordenadas en una base fija $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se determinan por

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ si i=j} \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases},$$

   probar que las coordenadas del tensor δ^i_j son las mismas en todos los sistemas de coordenadas.

2. Dar un ejemplo de un tensor simétrico y de uno antisimétrico.

3. Mostrar que todo tensor $(1-1)$ puede considerarse como el conjunto de los elementos de la matriz de un operador lineal.

4. Contraer el tensor a^{ij}_{klm} respecto de los índices j y l, considerando $n = 2$. Detallar los valores que se obtienen.

5. Mostrar que al contraer p veces un tensor de tipo $(p-p)$ se obtiene como resultado un escalar (invariante).

6. Sea el tensor a_{ij} (que determina una forma bilineal $A(x, y)$). Analizar que se obtiene al contraer este tensor con un par de vectores $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$.

7. Sea un tensor de tipo $(1-2)$ a^{ij}_k.

   a) Analizar que tipo de tensor se obtiene al contraerlo con un tensor métrico g_{pj}.

   b) Y al contraerlo con un tensor métrico de tipo g^{qk}?

Referencias

[1] L.I. Golovina, *Algebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*, Editorial M.I.R., Moscú, 1974.