MECÁNICA CELESTE I

Segundo parcial - Primera fecha

2 de Diciembre del 2015

1. Probar explícitamente que en un sistema de N masas puntuales sometidas a atracción newtoniana se cumple:
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \bigtriangledown_i U = -U, \tag{1}$$
donde m_i y r_i representan la masa y la distancia al origen de la partícula i.

2. Considerar aproximadamente la *Integral de Jacobi* para el sistema Sol-Tierra-Luna. Pensando el sistema en el marco del *problema restringido de los tres cuerpos*, determinar la forma de la *superficie de Hill* correspondiente.

   Puede la Luna *escapar* de su órbita alrededor de la Tierra y pasar a ser un satélite del Sol? Datos: Período de traslación de la Luna: 28 días. $a_{Luna} = 384400$ km. $\mu_{Tierra} = 3 \times 10^{-6}$

3. Considere pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de libración L_4 y L_5 para los Troyanos de Júpiter. Demuestre que en un período es cercano al de Júpiter y el otro es de 148 años. Datos: $\mu_{Júpiter} = 0{,}00095$, $a_{Júpiter} = 5{,}2$ UA.

4. Una partícula se mueve en el campo central $\mathbf{F}(r) = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza perturbadora por unidad de masa dada por:
$$\mathbf{F}_p = T\frac{\mathbf{V}}{V} \tag{2}$$
Las ecuaciones para la variación de los elementos orbitales (a y e) son
$$\frac{da}{dt} = 2Va^2\frac{T}{\mu}, \tag{3}$$
$$\frac{de}{dt} = 2(\cos\nu + e)\frac{T}{V}, \tag{4}$$
Considerar que
$$T = -cV^2 \tag{5}$$
Demostrar que la velocidad de los elementos orbitales correspondientes a un período orbital está dada por
$$\triangle a = -2ca^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(1+e\cos E)^3}{1-e\cos E}}\, dE, \tag{6}$$
$$\triangle e = -2ca(1-e^2) \int_0^{2\pi} \cos E \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\, dE \tag{7}$$