Matemática Especiales I

Primera Fecha, 3-12-2015

1. Dada la función $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2|y| - y)$, hallar dominio de derivabilidad y dominio de analiticidad.

2. Sea $f(z) = 1 + \sqrt{z}$, donde $\sqrt{z}$ representa una rama de la raíz cuadrada con corte en eje imaginario positivo tal que $f(1) = 0$

   a) Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$, donde γ es el arco de circunferencia $|z| = 1$ que va desde $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ hasta $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

   b) Calcular $\int_\delta f(x);dz$, donde δ es la poligonal que une los puntos $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ y $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ en ese orden.

3. Sea $0 < a < 1$. Considere la función $f_a(z) = \frac{e^z}{z^2+a^2}$. Considerando el sentido positivo de la curva y si usar el teoremas de los residuos, calcular $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2a} f_a(z)\, dz$.

4. Sea la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

   a) Hallar, sin calcular el desarrollo, el radio del mayor círculo con centro en $z_0 = 2i$ en el que $f(z)$ puede desarrollarse en series de Taylor.

   b) Encontrar el desarrollo en series de Taylor alrededor de $z_0 = 2i$ y verificar que el radio de convergencia coincida con el hallado en el item anterior.

5. *a*) Sea la función $f(z) = \frac{8z^3+i}{(z^2+1)\sin(\pi i/z)}$.

      i. Hallar todos sus puntos singulares e indicar si son aislados o no son aislados.

      ii. Clasificar sus puntos singulares aislados (en el caso de ser polos indicar el orden de los mismos).

   b) Sea la función $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)\sin(\pi i/z)}$. Calcule el residuo en $z = i$

Justificar todas las respuestas.