

Elementos de Astrofísica Teórica
Primera fecha, 24-11-2015

1. Para un modelo estelar lineal con $\rho = \rho_0 (1 - \frac{r}{R})$, derivar:
 - a) La variación de la presión con el radio ($P = P(r)$) y la relación $m = m(r)$. Con esta última derivar la relación masa total-radio del objeto ($M(R)$).
 - b) La variación de la temperatura con el radio [$T = T(r)$] (suponer que la presión sólo se debe a la presión de un gas ideal).
 - c) La energía potencial [$W = W(R, \rho_c)$].
 - d) Aproximando al sol con este modelo estelar lineal estime la temperatura central y con ella estime el valor de la presión de radiación. Compare este valor con la presión ejercida por el gas. ¿Fue correcto suponer que la presión se debía principalmente al gas?
2. Utilizando que la relación de dispersión para una perturbación $\rho_1 = c e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ en la densidad $\rho = \rho_0 + \rho_1$, ($\rho_1 \ll \rho_0$) de un fluido barotrópico, estacionario y autogravitante es de la forma

$$w(\vec{k})^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0,$$

- a) Derive una expresión para la longitud de onda de Jeans (λ_J) y su masa (M_J) asociada y discuta su significado.
 - b) Con las expresiones anteriores calcule el tamaño geométrico y la masa de una perturbación para que colapse una nube de gas interestelar ($T \sim 100\text{K}$, $\rho_0 \sim 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$) y discuta que tipos de objetos astronómicos podrían formarse de este colapso.
3. Calcule la energía liberada al transformarse 4 protones ($m_P = 1,0081 m_u$) en un núcleo de helio ($m_{He} = 4,0039 m_u$). Muestre que esto permite explicar que el sol haya brillado durante toda su vida ($4,57 \times 10^9$ años) con brillos no muy diferentes del actual.

4. Cosmología

Para un universo de 'polvo' (materia fría) se obtuvo en la teoría la ecuación que determina la evolución de a , la cual puede escribirse como

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \frac{\Omega}{a} = H_0^2 (1 - \Omega).$$

donde Ω está determinado por el contenido de materia y es $\Omega = \frac{\rho_{\text{hooy}}}{\rho_c}$ con ρ_c una densidad crítica cuyo valor es $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. El valor actual de a suele elegirse como $a_{\text{hooy}} = 1$.

- a) Resuelva la evolución del universo utilizando la ecuación 1 para un universo de polvo ($\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$) con una densidad igual a la densidad crítica ($\Omega = 1$) y muestre que a cumple

$$a = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \Omega = 1.$$

Interpretar físicamente.

- b) Comentar qué tipo de soluciones se obtienen para $\Omega > 1$ y $\Omega < 1$.