ALGEBRA 1- GRUPO CIENCIAS- TURNO TARDE-

**Resumen teoría Prof. Alcón**

## Espacios vectoriales

Sea $(\mathbb{K},+,.)$ un cuerpo con característica 0. Podemos pensar $K=\mathbb{Q},\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

- Si $\mathbb{V}$ es un conjunto cualquiera en el que está definida una operación $+:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$, tal que $(\mathbb{V},+)$ es un grupo conmutativo; y está definida una ley de composición externa $\cdot:\mathbb{K}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$, tal que para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ y para todo $u,v\in\mathbb{V}$ vale que

    - $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$
    - $(\alpha+\beta)\cdot u=\alpha\cdot u+\beta\cdot v$
    - $(\alpha.\beta)\cdot u=\alpha\cdot(\beta\cdot v)$
    - $1\cdot u=u$, donde 1 es el neutro del producto en $\mathbb{K}$;

  entonces se dice que $(\mathbb{V},+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial, o bien que es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

  Los elementos de $\mathbb{K}$ se dicen escalares, los elementos de $\mathbb{V}$ se llaman vectores, $+$ se dice suma de vectores y $\cdot$ producto por escalares. Abuso de notación: aunque se indican de la misma manera, estas operaciones no deben confundirse con las operaciones $+$ y . definidas en $\mathbb{K}$.

  Las operaciones $+$ y . de $\mathbb{K}$ se dicen la suma de escalares y el producto de escalares.

  El neutro de la suma en $\mathbb{K}$ se denotará 0 y el neutro de la suma en $\mathbb{V}$ se denotará $\overline{0}$, este se llama vector nulo.

  Por simplicidad en lugar de $(\mathbb{V},+,\cdot)$, escribiremos $\mathbb{V}$.

- Ejemplos: determine en cada uno de los siguientes caso las operaciones $+$ y $\cdot$ que proporcionan al conjunto dado la estructura de espacio vectorial indicada.

  Son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

    1. $\mathbb{R}^n$ para todo $n$ natural, incluso $n=1$.
    2. $\mathbb{C}^n$ para todo $n$ natural, incluso $n=1$.
    3. $\mathbb{R}^{n\times m}$ para todo $n$ y $m$ naturales.
    4. $\mathbb{C}^{n\times m}$ para todo $n$ y $m$ naturales.
    5. $\mathbb{R}[x]$
    6. $\mathbb{R}[x]_n=\{p\in\mathbb{R}[x]$ tal que $p=0$ o $gr(p)\leq n\}$
    7. $\mathbb{C}[x]$
    8. $\mathbb{C}[x]_n=\{p\in\mathbb{C}[x]$ tal que $p=0$ o $gr(p)\leq n\}$

  Son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

    1. $\mathbb{C}^n$ para todo $n$ natural, incluso $n=1$.
    2. $\mathbb{C}^{n\times m}$ para todo $n$ y $m$ naturales.
    3. $\mathbb{C}[x]$
    4. $\mathbb{C}[x]_n=\{p\in\mathbb{C}[x]$ tal que $p=0$ o $gr(p)\leq n\}$

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial, $u\in\mathbb{V}$ y $\alpha\in\mathbb{K}$. Vale que:

1. $0 \cdot v = \overline{0}$
2. $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$
3. $\alpha \cdot v = \overline{0} \Rightarrow \alpha = 0$ o $v = \overline{0}$
4. $(-1) \cdot v = -v$

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial. Un subconjunto no vacío $S$ de elementos de $\mathbb{V}$ se dice un $\mathbb{K}$ - subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si $S$ con la misma suma de vectores y producto por escalares es un espacio vectorial.

- Es fácil probar que $S$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V} \Leftrightarrow$ (1) $\overline{0} \in S$ y (2) para todo $v \in S$, para todo $w \in S$ y para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se satisface que $v + \alpha \cdot w \in S$.

- Ejemplos:

  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ es un $\mathbb{R} - \textit{subespacio}$ de $\mathbb{R}^2$ con la suma habitual de vectores y el producto habitual por escalares.

  $S = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 3} : A_{11} = A_{22} = 0\}$ es un $\mathbb{C} - \textit{subespacio}$ de $\mathbb{C}^{2\times 3}$ con la suma habitual de matrices y el producto habitual por escalares.

  Sea $A.X = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la forma matricial de un sistema homogéneo de $n$ ecuaciones lineales con $m$ incógnitas. El conjunto de soluciones del sistema $S = \{v \in \mathbb{R}^m : A.v = 0\}$ es $\mathbb{R} - \textit{subespacio}$ de $\mathbb{R}^m$ con la suma habitual de vectores y el producto habitual por escalares.

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial y $v_1, v_2, ...., v_k$ vectores de $\mathbb{V}$. Se dice que un vector $w$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ...., v_k$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tales que $w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_k \cdot v_k$.

- Si $w$ es combinación lineal de $v_1, v_2, ...., v_k$ y cada $v_i$ es combinación lineal de $u_1, u_2, ...., u_h$, entonces $w$ es combinación lineal de $u_1, u_2, ...., u_h$.

- Un sistema de generadores de $\mathbb{V}$ es un subconjunto $S$ de vectores de $\mathbb{V}$, es decir $S \subseteq \mathbb{V}$, tal que todo vector de $\mathbb{V}$ se escribe como combinación lineal de vectores de $S$.

- Si $v_1, v_2, ...., v_k$ es un sistema de generadores de $\mathbb{V}$ y a uno cualquiera de estos vectores, digamos $v_k$, se escribe como combinación lineal de los demás (es decir $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \cdot v_i$ para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{K}$) entonces $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ también es un sistema de generadores de $\mathbb{V}$.

- Los vectores $v_1, v_2, ...., v_k$ se dicen linealmente independientes, o bien que son un conjunto de vectores linealmente independientes, si el vector nulo se escribe de una única manera como combinación lineal de ellos, es decir si

  $$\overline{0} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_k \cdot v_k \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0.$$

  Un conjunto $L \subseteq \mathbb{V}$ se dice linealmente independiente si los vectores de cualquier subconjunto finito de $L$ son linealmente independientes.

  Los vectores $v_1, v_2, ...., v_k$ se dicen linealmente dependientes si no son linealmente independientes.

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial y $v_1, v_2, ...., v_k$ vectores de $\mathbb{V}$. Vale que,

  1. Si uno cualquiera de los vectores $v_i$ es el vector $\overline{0} \Rightarrow v_1, v_2, ...., v_k$ es linealmente dependiente.
  2. Si dos cualesquiera de los vectores $v_i$ son iguales entre sí $\Rightarrow v_1, v_2, ...., v_k$ son linealmente dependientes.
  3. Los vectores $v_1, v_2, ...., v_k$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ alguno de ellos se escribe como combinación lineal de los demás.
  4. Si $v_1, v_2, ...., v_k$ son linealmente dependientes y $\{v_1, v_2, ...., v_k\} \subseteq S \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow S$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

5. Si $v_1, v_2, ...., v_k$ son linealmente independientes y $S \subseteq \{v_1, v_2, ...., v_k\} \Rightarrow S$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

- Una <u>base</u> de $\mathbb{V}$ es un conjunto $B \subseteq \mathbb{V}$ tal que $B$ es linealmente independiente y $B$ es sistema de generadores $\mathbb{V}$.

  Ejemplo: Base canónica de algunos $\mathbb{R}$ espacios vectoriales:

  1. De $\mathbb{R}$ es el vector 1.
  2. De $\mathbb{R}^n$ son los vectores $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,...,$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$.
  3. De $\mathbb{C}$ son los vectores 1 e $i$. Observa que si consideramos $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial entonces la base canónica tiene un único elemento que es el vector 1.
  4. De $\mathbb{R}^{n\times m}$ son las matrices de orden nxm, que denotamos $E_{ij}$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tales que todos sus coeficientes con 0 salvo el de la posición $ij$.
     Por ejemplo la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es
     $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
     Observar que una matriz cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se escribe como la siguiente combinación lineal de los vectores de la base dada,

     $$A = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22}$$

  5. De $\mathbb{R}[x]$ son los vectores $1, x, x^2, x^3, ..., x^n, .....$ Es una base infinita, es decir con una cantidad infinita de elementos.
  6. De $\mathbb{R}[x]_n = \{p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p = 0$ o $gr(p) \leq n\}$ son los vectores $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$, en este caso es una base finita.

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial y $B \subseteq \mathbb{V}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

  1. $B$ es una base de $\mathbb{V}$.
  2. Todo vector de $\mathbb{V}$ se escribe de una única manera como combinación lineal de vectores de $B$.
  3. $B$ es un conjunto de vectores linealmente independientes maximal (i.e. si $B \subsetneqq T$ entonces $T$ no es linealmente independiente).
  4. $B$ es un sistema de generadores minimal (i.e. si $T \subsetneqq B$ entonces $T$ no es sistema de generadores de $\mathbb{V}$).

- Si un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene una base con $n$ elementos, entonces cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ con $k > n$ vectores es linealmente dependiente.

  Corolario: toda base de $\mathbb{V}$ tiene la misma cantidad de elementos, esta cantidad se llama la <u>dimensión</u> del espacio $\mathbb{V}$ y se denota $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$.

  Ejemplos:

  1. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
  2. $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
  3. El espacio vectorial nulo $\mathbb{N}$ tiene por único elemento al vector nulo, es decir $\mathbb{V} = \{\overline{0}\}$. Observar que $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = 0$.
  4. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$
  5. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n\times m}) = n.m$

6. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$

- Ejercicio: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial con $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Probar que:

    1. Si $v_1, ..., v_k$ son linealmente independiente entonces existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ tal que $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq B$ y por lo tanto $k \leq n$.
    2. Todo subconjunto de $n$ vectores linealmente independiente es una base.
    3. Si $v_1, ..., v_k$ es un sistema de generadores de $\mathbb{V}$ entonces existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ tal que $B \subseteq \{v_1, ..., v_k\}$ y por lo tanto $n \leq k$.
    4. Un subconjunto de vectores con menos de $n$ elementos no puede ser un sistema de generadores de $\mathbb{V}$.
    5. Un conjunto de vectores con más de $n$ elementos no puede ser linealmente independiente.

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$- espacio vectorial y $v_1, v_2, ...., v_n$ los vectores de una base de $\mathbb{V}$ dados en un cierto orden. Si $w \in \mathbb{V}$, sabemos que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, que además son únicos, tales que $w = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$. Estos escalares se dicen las coordenadas de $w$ en la base $B$ y suele indicarse $w = (\alpha_1, ..., \alpha_n)_B$. Cuando la base B es la canónica el subinice $_B$ puede omitirse.

  Ejemplo: Considero la siguiente base B de $\mathbb{R}^3$ dada en el orden indicado:

  $$(1, 1, 1) \ \ (0, 2, 0) \ \ (0, 0, 3)$$

  Ahora, si escribo $w = (2, 1, -2)_B$ me estoy refiriendo al vector de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en dicha base son 2, 1 y $-2$, por lo tanto

  $$w = 2 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (0, 2, 0) + (-2) \cdot (0, 0, 3) = (2, 2, 2) + (0, 2, 0) + (0, 0, -6) = (2, 4, -4)$$

  Observar que $(2, 4, -4)$ son las coordenadas de $w$ en la base canónica, es decir

  $$w = 2 \cdot (1, 0, 0) + 4 \cdot (0, 1, 0) + (-4) \cdot (0, 0, 1)$$

- Sea $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial y $S \subseteq \mathbb{V}$. Indicamos mediante $< S >$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de $S$, es decir, el conjunto de todos los $w \in \mathbb{V}$ para los cuales existen $v_1, v_2, ..., v_k \in S$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que $w = \alpha_1.v_1 + ... + \alpha_k.v_k$.

  $< S >$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$, más aún es el menor subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ que contiene a $S$, pues es la intersección de todos los subespacios de $\mathbb{V}$ que contienen a $S$. El subespacio $< S >$ se llama subespacio generado por $S$.

  Por ejemplo: en $\mathbb{R}^3$

    - Si $S = \{v_1\}$ entonces $\langle S \rangle = \{\alpha \cdot v_1, \ \ \text{con } \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $v_1 \neq \overline{0}$ entonces $< S >$ coincide con la recta por el origen cuyo vector director es $v_1$.
    - Si $S = \{v_1, v_2\}$ entonces $\langle S \rangle = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2, \ \ \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ y si $v_1, v_2$ son colineales, es decir estan sobre una misma recta que pasa por el origen, entonces $< S >$ coincide con dicha recta. Si no son colineales entonces $< S >$ coincide con el plano por el origen que contiene a $v_1$ y a $v_2$.

- $S$ es un sistema de generadores de $\mathbb{V}$ si y sólo si $< S >= \mathbb{V}$.

- Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, llamemos $v_1, ...., v_n$ a los vectores fila de $A$, y llamemos $w_1, ..., w_m$ a los vectores columna de $A$. Observar que $S_f =< \{v_1, ...., v_n\} >$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$; en tanto que $S_c =< \{w_1, ...., w_m\} >$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El primero se llama espacio fila de $A$ y el segundo se llama espacio columna de $A$. Vale que

$$dim_{\mathbb{R}}(S_f) = dim_{\mathbb{R}}(S_c) = rango(A)$$

Así, si se quiere determinar la dimensión del subespacio generado por una cierta cantidad de vectores $u_1, u_2, ..., u_t$, se puede formar una matriz $A$ que tenga a estos vectores como filas (o como columnas) y determinar el rango de la matriz $A$ usando alguno de los métodos vistos cuando estudiamos matrices.

- Sean $S_1$ y $S_2$ subconjuntos de $\mathbb{V}$. Indicamos:

$$S_1 \cap S_2 = \{w \in \mathbb{V} \mid w \in S_1 \text{ y } w \in S_2\}$$

$$S_1 + S_2 = \{w \in \mathbb{V} \mid w = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in S_1 \text{ y } v_2 \in S_2\}$$

Si $S_1$ y $S_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}$, entonces $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$ también son subespacio vectoriales de $\mathbb{V}$. Además si $S_1 \cap S_2 = \{\overline{0}\}$ entonces $S_1 + S_2$ se dice la <u>suma directa</u> de $S_1$ y $S_2$ y en este caso se indica $S_1 \oplus S_2$. Observar que $S_1 \cup S_2$ puede no ser un subespacio.

- Además,
  1. Si $\mathbb{S}$ es subespacio de $\mathbb{V}$ entonces $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}) \leq dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.
  2. Si $\mathbb{S}$ es subespacio de $\mathbb{V}$ y $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}) = dim_{\mathbb{K}}(V)$ entonces $\mathbb{S} = \mathbb{V}$.
  3. Si $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son subespaciones de $\mathbb{V}$ entonces
     $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_1) + dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_2) - dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2)$
     $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_1) + dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}_2)$