Mecánica Celeste I
2000 - Segundo Parcial. Tercera Fecha

1) Una partícula se mueve en el campo central:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{-\mu}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

bajo la acción de una fuerza perturbadora por unidad de masa dada por:

$$\mathbf{F}_p = T\frac{\mathbf{V}}{V}.$$

Las ecuaciones para la variación de los elementos obitales son

$$\frac{da}{dt} = 2Va^2\frac{T}{\mu},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\sin\nu\frac{T}{eV},$$

$$\frac{de}{dt} = 2\left(\cos(\nu) + e\right)\frac{T}{V}.$$

a) Mediante el cambio de variables

$$dt = n^{-1}\left(1 - e\cos E\right)dE,$$

escribir las ecuaciones correspondientes tomando a la anomalía excéntrica E como variable independiente.
b) En el caso en el que:

$$T = -c\,V^2,$$

donde c es constante. Encontrar la variación de los elementos orbitales Δa, Δe y $\Delta\omega$ correspondientes a un período orbital.
Nota: En el caso de ω utilizar el cambio de variables:

$$dt = \frac{r^2}{h}d\nu.$$

donde ν es la anomalía verdadera y h es el momento angular.

2) A partir de la integral de Jacobi expresada de la sigyuiente manera:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - 2\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C$$

a) Demostrar que para órbitas cometarias elípticas, la *Integral de Jacobi* adopta *aproximadamente* la forma.

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)}cosi = C, \tag{1}$$

b) Se han observado dos objetos de apariencia cometaria en dos oportunidades distintas, separadas por un intervalo de, aproximadamente, unos 30 años. En la primera oportunidad la

determinacion orbital arrojó los siguientes elementos:
a = 5,0 AU
e = 0.1
inc = 0.0 deg,
mientras que para el segundo objeto los elementos determinados fueron:
a = 5,5 AU
e = 0,05
inc = 20.8 deg,
¿Podrían ambas observaciones corresponder a un mismo cuerpo?. ¿Cómo variaría su respuesta si la primera de las observaciones hubiera sido efectuada cuando el objeto se encontraba muy cercano a Júpiter?.

3) a) Demostrar que el punto de Lagrange L1 del problema restringido de los 3 cuerpos es un punto de equilibrio.
b) Un cuerpo se mueve alrededor de solamente una de las masas principales, (en el marco del problema restringido de los tres cuerpos) ¿ Cuál es el mínimo valor de su constante de Jacobi para que su trayectoria no encierre también a la otra masa principal y el cuerpo siga orbitando la primer masa? Exprese su respuesta en función del valor de la constante de Hill de los puntos de Equilibrio para un sistema con $\mu = 0.1$.