Mecánica Celeste I

2002 - Segundo Parcial - Segunda fecha

1)Una partícula se mueve en el campo central $\mathbf{F}(r) = \frac{-\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza perturbadora por unidad de masa dada por

$$\mathbf{R} = \frac{R}{r}\hat{\mathbf{r}}.$$

Las ecuaciones para la variación de los elementos obitales son

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\ n\ a^3\ e}{\mu}\left(\frac{R\ sen(\nu)}{\sqrt{1-e^2}}\right),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{n\ a^2}{\mu e}\ \sqrt{1-e^2}\ R\ cos(\nu),$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{n\ a^2}{\mu}\ \sqrt{1-e^2}\ R\ sen(\nu).$$

a) En que plano se dará el movimiento?.

b) ¿ Cuánto variará su eje semi-mayor y su eccentricidad en un período orbital?. Justifique.

c) Mediante el cambio de variables $dt = (r^2/h)d\nu$ calcular cual es el cambio en la orientación de la órbita en el plano.

2) Si definimos:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \tag{1}$$

Mostrar que la integral de Jacobi C puede escribirse en la forma:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C \tag{2}$$

Mostrar que C toma el mismo valor en L_4 y L_5, independientemente de μ y encontrar ese valor.

3) En el marco del problema restringido de los tres cuerpos,

i) Plantear las ecuaciones de movimiento variacionales alrededor de los puntos de equilibrio triangulares.

ii) Hallar el polinomio característico correspondiente a la solución de las ecuaciones planteadas en el punto y discutir la condición de estabilidad.
iii) Calcular las frecuencias de libración correspondientes.
iv) Encontrar el valor de μ para el cual las frecuencias de libración s1 y s2 están relacionadas por: $s1 = 2 * s2$ y decir si en este caso el movimiento es estable o inestable.

4)
a) Sea un sistema de N partículas que interactúa gravitatoriamente, sea $I = \sum_{i=1}^{N} m_i {r^2}_i$, donde m_i y r_i representan la masa y la distancia al origen de la particula i. A partir de la *ecuación de Jacobi*:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(E + T),$$

donde E y T son respectivamente, la energía total y cinética del sistema, demostrar que si las posiciones y velocidades de las partículas del sistema permanecen acotadas para todo tiempo t, se verifica el teorema del virial:

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0, \tag{3}$$

donde

$$\langle T \rangle = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T \, dt, \tag{4}$$

$$\langle U \rangle = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U \, dt, \tag{5}$$