Mecánica Celeste I
2000 - Segundo Parcial
Segunda Fecha

1) Una partícula se mueve en el campo central:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{-\mu}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

bajo la acción de una fuerza perturbadora por unidad de masa dada por:

$$\mathbf{F}_p = T\frac{\mathbf{V}}{V}.$$

Las ecuaciones para la variación de los elementos obitales son

$$\frac{da}{dt} = 2Va^2\frac{T}{\mu},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\sin\nu\frac{T}{eV},$$

$$\frac{de}{dt} = 2\cos\left(\nu + e\right)\frac{T}{V}.$$

a) Mediante el cambio de variables

$$dt = n^{-1}\left(1 - e\cos E\right)dE,$$

escribir las ecuaciones correspondientes tomando a la anomalía excéntrica E como variable independiente.
b) En el caso en el que:

$$T = -c\ V^2,$$

donde c es constante. Encontrar la variación de los elementos orbitales Δa, Δe y $\Delta\omega$ correspondientes a un período orbital.
Nota: En el caso de ω utilizar el cambio de variables:

$$dt = \frac{r^2}{h}d\nu.$$

donde ν es la anomalía verdadera y h es el momento angular.

2) Considerar aproximadamente la *Integral de Jacobi* para el sistema Sol-Júpiter-Io.
a) Comentar sobre la aplicabilidad del marco del *problema restringido de los tres cuerpos* para este sistema y determinar la forma de la *superficie de Hill* correspondiente.
b) Puede el Satélite Io *escapar* de su órbita alrrededor de Júpiter y pasar a ser un satélite del Sol?
Datos:
$M_{Sol} = 2\ 10^{30}$ kg
$m_{Jup} = 1.9\ 10^{27}$ kg

$m_{Io} = 8.39\ 10^{22}$ kg
Eje semi-major de la órbita heliocéntrica Júpiter = 5.203 UA
eccentricidad de la órbita heliocéntrica Júpiter = 0.048
inclinación de la órbita heliocéntrica Júpiter = 1.3°
Período de la órbita planetocéntrica de Io = 1.8 días
Eje semi-major de la órbita planetocéntrica de Io = 422,000 km
1 UA = $1.5\ 10^8$ km

3) En el marco del problema restringido de los tres cuerpos,
a) Plantear las ecuaciones de movimiento *variacionales* alrededor del puntos de equilibrio co-lineales.

b) Hallar el polinomio caracterísitico correspondiente a la soluciöm de las ecuaciones halladas anteriormente.
c) Cuál es la condición de estabilidad?, Se satisface siempre?. Puede dar un ejemplo en el cual la solución de pequeñas oscilaciones es estable?.
d) Describir brevemente como hallaría la ecuación de la órbita. En el caso estable que forma tiene y cómo calcularía los parámetros correspondientes.

4) a) A partir de la *ecuación de Jacobi*:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(E + T),$$

demostrar que para todo t ≥ 0 se verifica:

$$I(t) \geq I(0) + t\dot{I}(0) + t^2 E,$$

donde $I(0)$ y $\dot{I}(0)$ representan respectivamente las cantidades I y $\frac{dI}{dt}$, evaluadas en $t = 0$.
b) A partir de la desigualdad anterior demostrar que, si la energía del sistema es positiva, al menos para una de las partículas se tiene

$$\lim_{t\to\infty} r_i = \infty.$$