

Mecánica Celeste I

1999 - Segundo Parcial

1) Un cuerpo orbita en un órbita Kepleriana alrededor de una estrella central. Esta estrella se encuentra rodeada de un disco gaseoso por lo que la órbita del cuerpo es perturbada por una fuerza de drag de la forma:

$$T = -c \frac{V}{r^2}.$$

Si la variación de los elementos orbitales puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{da}{dt} = 2 V a^2 \frac{T}{\mu} \quad (1)$$

$$\frac{de}{dt} = 2 (\cos(\nu) + e) \frac{T}{V}. \quad (2)$$

i) Mediante el cambio de variables:

$$dt = \frac{r^2}{h} d\nu,$$

expresar las ecuaciones anteriores en función de la anomalía verdadera ν .

ii) Estimar a *primer orden* en cuántos períodos orbitales se circularizará la órbita del cuerpo desde un valor de $e = e_0$.

iii) Cuánto variará –también a primer orden– su eje semi mayor en ese lapso?.

2) Sean dos planetas de igual masa M en órbitas circulares mutuas, a una distancia $a = 1$. Uno de ellos posee un satélite, también en órbita circular en el plano orbital de los dos planetas a una distancia R del mismo, con velocidad angular ω (en el sistema rotante). Se desea efectuar un cambio en la velocidad del satélite en la dirección perpendicular a su trayectoria de modo que este sea capaz de alcanzar al otro planeta.

i) En qué punto de su trayectoria debe efectuarse ese cambio de velocidad, para que este se el mínimo posible (en el sistema rotante y compatible con la constante de Jacobi)?

ii) Cuánto vale ese cambio en la velocidad ?.

iii) Si $\omega = 1/\sqrt{2}$ cuál es el máximo valor de R para el cual el cálculo anterior tiene sentido?. Interprete físicamente.

3) En el marco del problema restringido de los tres cuerpos,

i) Calcular las coordenadas de los puntos de equilibrio equiláteros (es decir aquellos para los cuales $y \neq 0$).

ii) Plantear las ecuaciones de movimiento variacionales alrededor del punto de equilibrio equilátero L_4 ($y(L_4) > 0$).

iii) Cuál es el máximo valor de μ para el cuál el movimiento es estable?, porqué?.

4) Se tiene un sistema de N cuerpos masivos. Decir en que casos se verifica (y porqué) y qué forma adopta el Teorema del Virial.

a) El sistema es estacionario. b) Las posiciones de las partículas no permanecen acotadas para todo tiempo t . c) Las posiciones y velocidades de las partículas permanecen acotadas para todo tiempo t .