

Mecánica Celeste I
2002 - Segundo Parcial
Primera Fecha

1) a) A partir de la *ecuación de Jacobi*:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(E + T),$$

demostrar que para todo $t \geq 0$ se verifica:

$$I(t) \geq I(0) + t\dot{I}(0) + t^2 E,$$

donde $I(0)$ y $\dot{I}(0)$ representan respectivamente las cantidades I y $\frac{dI}{dt}$, evaluadas en $t = 0$.

2) a) En el marco del problema restringido de los tres cuerpos, discutir brevemente (y graficar cualitativamente) las formas de las curvas de velocidad cero (superficies de Hill) en el plano xy , regiones prohibidas y de movimiento para distintos valores de la constante C de Jacobi.

b) A partir de que valor desaparecen las superficies de Hill del plano xy . Justifique.

c) Un cuerpo alcanza la superficie de Hill correspondiente a un valor C_0 . ¿Cuál es su velocidad en ese instante y el valor de su constante de Jacobi para todo tiempo?. Describir su trayectoria inmediatamente después. Justifique

3) En el marco del problema restringido de los tres cuerpos con $\mu = 1/3$. Un cuerpo orbita en el plano $x-y$, su constante de Jacobi es $C_J = 25/9$.

a) ¿Podría este cuerpo hallarse estacionado en alguno de los puntos equiláteros de Lagrange?.

b) Si se dieran las condiciones tal que pudiera hacerlo, si se lo apartara ligeramente de esa posición, como sería su trayectoria posterior?. Justifique.

Datos: $U_{xx} = -3/4$, $U_{yy} = -9/4$, $U_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$

4) Un cuerpo orbita en un órbita Kepleriana alrededor de una estrella central. Esta estrella se encuentra rodeada de un disco gaseoso por lo que la órbita del cuerpo es perturbada por una fuerza de drag de la forma:

$$T = -c \frac{V}{r^2}.$$

Si la variación de los elementos orbitales puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{da}{dt} = 2V a^2 \frac{T}{\mu} \tag{1}$$

$$\frac{de}{dt} = 2(\cos(\nu) + e) \frac{T}{V}. \tag{2}$$

i) Mediante el cambio de variables:

$$dt = \frac{r^2}{h} d\nu,$$

expresar las ecuaciones anteriores en función de la anomalía verdadera ν .

ii) Estimar a primer orden en cuántos períodos orbitales se circularizará la órbita del cuerpo desde un valor de $e = e_0$.

iii) Cuánto variará –también a primer orden– su eje semi mayor en ese lapso?.