

MECÁNICA CELESTE I

Primer parcial - Segunda fecha

1) a) Dada una curva en forma paramétrica $(r(t), \nu(t))$, el área subtendida por ella entre dos instantes t_1 y t_2 , está dada por:

$$S_{12} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2(t) \left(\frac{d\nu}{dt} \right) dt \quad (1)$$

A partir de esta ecuación obtener la relación.

$$S_{12} = ab(E - e \sin E)/2 \quad (2)$$

b) A partir de la expresión obtenida en el ej. a, de la segunda y de la tercera ley de Kepler, obtener la ecuación de Kepler.

2) a) ¿ En qué puntos de la órbita coinciden los valores de las anomalías media, verdadera y excéntrica, cuánto valen ? ¿ Qué valores toman en los extremos del semieje menor?

b) Un planeta se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica de semieje mayor a y excentricidad e . Hallar cuanto tiempo tarda en recorrer la parte de la órbita comprendida entre los extremos del semieje menor del lado del afelio. Expresar este intervalo en términos de a y e .

3) Un satélite artificial describe una órbita elíptica en torno a un planeta. Al pasar por el *latus rectum* recibe un pequeño impulso instantáneo. El módulo de su velocidad v se incrementa en $\delta v = \alpha v$, pero la dirección de ésta no se altera, calcular a primer orden el cambio en:

a) El semieje mayor a .

b) La excentricidad e .

c) El radiovector correspondiente al extremo del semieje menor.

4) La posición vectorial $\mathbf{r}(t)$ en la órbita relativa del problema de los dos cuerpos puede expresarse como una combinación lineal de la posición $\mathbf{r}_0(t)$ y de la velocidad $\mathbf{v}_0(t)$ iniciales,

$$\mathbf{r}(t) = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0. \quad (3)$$

donde f y g son funciones escalares que dependen de las condiciones iniciales t_0 , \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 y de t .

a) Demostrar que f y g verifican las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{f} = \frac{-\mu f}{r^3}. \quad (4)$$

$$\ddot{g} = \frac{-\mu g}{r^3}. \quad (5)$$

b) Hallar un desarrollo en serie de potencias de $(t - t_0)$, a tercer orden, para las funciones f y g . Sugerencia: utilizar los desarrollos en series de Taylor de f y g alrededor de t_0 y las ecuaciones del ej a.

c) Indique cuando se emplean las series f y g .