

MECÁNICA CELESTE I

Primer parcial - Primera fecha

1) Partiendo de la definición de anomalía excéntrica E dada por la relación $r = a(1 - e \cos E)$, demostrar las siguientes relaciones entre ella y la anomalía verdadera ν :

a)

$$x = r \cos \nu = a(\cos E - e).$$

$$y = r \sin \nu = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

b)

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

c)

$$\sin \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}.$$

d) Explicar en no más de cuatro renglones, para qué sirven básicamente la anomalía media M , la anomalía excéntrica E y la *Ecuación de Kepler*.

2)

a) Determinar la fracción del período orbital P en una órbita elíptica, que emplea un cuerpo en recorrer la parte de la órbita comprendida entre los extremos del semieje menor, del lado del pericentro.

b) El período sidéreo de Júpiter es de 11.86 años. ¿Cuál es su eje semi-mayor a . Si un cuerpo de masa despreciable tiene el mismo eje semi-mayor, ¿cuál será su período?.

3) Sea la ecuación de Kepler:

$$E - e \sin E = M,$$

a) Demostrar que tiene una *única* solución en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Utilizando el método de Lagrange hallar un desarrollo en serie para dicha solución, válido a segundo orden en e .

4) Un cometa describe una órbita elíptica de semi-eje mayor a y excentricidad e . Al pasar por un extremo del eje menor recibe un incremento en velocidad Δv , perpendicular a su velocidad orbital instantánea. Si la órbita resultante es parabólica, hallar Δv y la distancia perihélica de la órbita final.

Nota: Comparar las energías y los momentos angulares iniciales y finales. Recordar que $h = \sqrt{2\mu q}$, donde q es la distancia perihélica.

5)

a) Para eccentricidades bajas ($e < 0.1$), ¿hasta qué orden es necesario considerar las funciones de Bessel para obtener una solución precisa de la ecuación de Kepler?

b) Si un cometa posee una eccentricidad superior a 0.7, ¿qué método utilizaría para obtener la anomalía exéntrica en función del tiempo?

c) Describir los pasos necesarios, incluyendo las rotaciones pertinentes, para obtener las coordenadas eclipticales de un cuerpo en órbita heliocéntrica a partir de sus elementos orbitales ($a, e, i, \Omega, \omega, M$). ¿Qué modificaciones deben hacerse a las coordenadas anteriores si se desean coordenadas ecuatoriales o geocéntricas?

d) Dos cuerpos parten de un mismo punto en el Sistema Solar con velocidades de igual módulo pero en diferentes direcciones en el mismo plano respecto del Sol, ¿qué elementos orbitales tendrán en común y cuales no?. Justifique su respuesta.