CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

Módulo 3: Ecuaciones algebraicas

Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

ECUACIONES ALGEBRAICAS

Decimos que **una igualdad son dos expresiones vinculadas por el signo igual**, aquí a cada expresión se la llama miembro, el **primer miembro corresponde a la expresión que está a la izquierda del signo igual y el segundo miembro es la expresión que está a la derecha.**

Una igualdad que se verifica para cualquier conjunto de valores de las variables es una identidad.

Ejemplo: *Las siguientes igualdades son identidades*

$$\begin{aligned} a &= a \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Una igualdad que se verifica para ciertos valores de las variables es una ecuación. Los valores que satisfacen la ecuación se llaman raíces de la ecuación.

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas raíces.

Para resolver una ecuación hay que operar miembro a miembro para despejar la o las variables.

En el caso particular de tener una ecuación igualada a cero (esto implica que uno de los miembros de la igualdad es cero) a los valores de las variables que satisfacen la ecuación se los llama **RAÍCES** de la ecuación.

ATENCIÓN

Operar miembro a miembro garantiza que la nueva ecuación es una igualdad pero NO GARANTIZA que sea una ecuación equivalente. Por ejemplo

$$x = 2 \Longrightarrow 2 \text{ es raíz}$$

elevando al cuadrado en ambos miembros (manteniendo la igualdad) obtenemos una nueva ecuación

$$x^2 = 4 \Longrightarrow 2 \text{ y } -2 \text{ son raíces}$$

como las raíces son distintas las ecuaciones no son equivalentes. Este hecho hay que tenerlo muy presente a la hora de resolver ecuaciones.

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales son polinomios de grado 1 igualados a cero, es decir que la máxima potencia de la variable debe ser igual a la unidad.

$$a\,x + b = 0$$

Este tipo de ecuaciones tiene una única solución. Para despejar la variable primero se resta b en ambos miembros y luego se divide, en ambos miembros, por a:

$$\begin{aligned} a\,x + b - b &= 0 - b \\ \frac{a\,x}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Entonces **la única solución de una ecuación lineal $\boldsymbol{ax + b = 0}$ es:**

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

No hace falta aclarar que a es distinto de cero, porque si $a = 0$ no tendríamos un polinomio de grado 1 igualado a cero.

Pérdida de raíces:

Una ecuación puede resolverse de diferentes formas. Sin embargo, hay veces que según el camino elegido se puede obtener un resultado equivocado cuando no se opera cuidadosamente. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo: *Tomemos la ecuación lineal*

$$3\,x+3=4\,(x+1)$$

y vamos a resolverla de dos maneras diferentes:

Caso 1:

$$\begin{array}{rcl} 3\,x+3 & = & 4\,(x+1) \\ 3\,(x+1) & = & 4\,(x+1) \\ 3\,\cancel{(x+1)} & = & 4\,\cancel{(x+1)} \\ 3 & = & 4 \Longrightarrow \nexists \text{ solución} \end{array}$$

Caso 2:

$$\begin{array}{rcl} 3\,x+3 & = & 4\,(x+1) \\ 3\,x+3 & = & 4\,x+4 \\ 3-4 & = & 4\,x-3\,x \\ -1 & = & x \Longrightarrow \exists \text{ solución} \end{array}$$

¿Cuál es la solución correcta? ¿Dónde está el error?

En realidad, las dos resoluciones son posibles pero se llega a distintos resultados porque ***el caso 1 está incompleto****. Lo que sucede es que para poder simplificar el factor $(x+1)$ hay que aclarar que la simplificación es posible siempre y cuando $(x+1)\neq 0$, ya que simplificar es equivalente a dividir por $(x+1)$ en ambos miembros, pero para poder hacer esto hay que garantizar que no se está dividiendo por cero. Entonces, la primera resolución tendría que hacerse de la siguiente manera:*

Caso 1:

$$\begin{array}{rcl} 3\,x+3 & = & 4\,(x+1) \\ 3\,(x+1) & = & 4\,(x+1) \end{array}$$

Aquí hay que separar en dos casos:

Caso 1a: *si $(x+1)\neq 0$ entonces podemos simplificar*

$$\begin{array}{rcl} 3\,\cancel{(x+1)} & = & 4\,\cancel{(x+1)} \\ 3 & = & 4 \Longrightarrow \nexists \text{ solución} \end{array}$$

Caso 1b: *si $(x+1)=0$ entonces $x=-1$. Probemos si el valor $x=-1$ satisface la ecuación $3\,x+3=4\,(x+1)$. Para esto hay que reemplazar a x por su valor correspondiente y ver si obtenemos una igualdad.*

$$\begin{array}{rcl} 3\,.\,(-1)+3 & = & 4\,(-1+1) \\ -3+3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \Longrightarrow \exists \text{ solución} \end{array}$$

Luego, como $x = -1$ satisface la ecuación tenemos que -1 es raíz. De este modo conseguimos, a través del caso 1 y el caso 2, obtener la misma solución.

La pérdida de raíces se puede dar en cualquier tipo de ecuación. Por esto es importante resolver cuidadosamente las ecuaciones y a la hora de simplificar hay que analizar los casos individualmente.

Ejercicio

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $k\,(k\,-\,1)\,+\,(k\,-\,1)\,=\,5\,k\,+\,k$

b) $(x\,+\,3)^2\,=\,x\,(x\,+\,3)$

Ecuaciones lineales que involucran módulo

Cuando tenemos una ecuación lineal donde la incógnita forma parte del argumento de un valor absoluto, hay que utilizar la definición del módulo para poder despejar la incógnita.

Ejemplo: *Supongamos que queremos encontrar los valores de z tales que:*

$$|z + 1| = 2$$

Para poder despejar z de la ecuación tenemos que sacar las barras de módulo, para ello vamos a utilizar la definición de valor absoluto. La definición dada en el capítulo Números Reales es la siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora apliquemos la definición a nuestro caso:

$$\begin{array}{l} \text{si } z + 1 \geq 0 \Longrightarrow |z + 1| = z + 1 \\ \text{si } z + 1 < 0 \Longrightarrow |z + 1| = -(z + 1) \end{array}$$

De modo que para resolver nuestra ecuación lineal tenemos que separar en dos casos, un caso será cuando $z + 1 \geq 0$ y el otro cuando $z + 1 < 0$. Entonces

Caso 1: si $z + 1 \geq 0 \Longrightarrow |z + 1| = z + 1$. *Reemplazando el valor del módulo en la ecuación obtenemos que:*

$$\begin{aligned} |z+1| &= 2 \\ z+1 &= 2 \\ z &= 2-1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

*Ahora, el valor $z = 1$ será solución de la ecuación siempre y cuando también se cumpla que $z+1 \geq 0$ para $z = 1$ (porque esta fue la condición con la que pudimos sacar la barras de módulo). Como $z + 1 = 2 > 0$ cuando $z = 1$, resulta que **$z = 1$ es raíz**.*

Caso 2: si $z + 1 < 0 \Longrightarrow |z + 1| = -(z + 1)$. *Reemplazando el valor del módulo en la ecuación obtenemos que*

$$\begin{aligned} |z+1| &= 2 \\ -(z+1) &= 2 \\ -z-1 &= 2 \\ -1-2 &= z \\ -3 &= z \end{aligned}$$

*Nuevamente, antes de apresurarse a decir que $z = -3$ es raíz hay que asegurarse que este valor satisfaga que $z + 1 < 0$. Entonces, para $z = -3$, resulta que $z + 1 = -3 + 1 = -2 < 0$. Ahora sí podemos decir que **$z = -3$ es raíz**.*

Finalmente tenemos dos valores de z que satisfacen la ecuación $|z + 1| = 2$, estos valores son $z = 1$ y $z = -3$.

Ejercicio

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $|x - 5| = 8$

b) $5\,h = |3 - h|$

Sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué pasa si una ecuación lineal tiene dos incógnitas?. Supongamos que tenemos la ecuación:

$$2\,r - p = 6$$

Lo único que se puede hacer en una situación como esta es escribir una variable en función de la otra, es decir, despejar alguna de las variables. Por ejemplo, despejemos p (porque es más fácil que despejar r, pero si ustedes quieren, pueden despejar r). Entonces, nos quedaría que:

$$p = 2\,r - 6$$

¿Y cuál es la solución de la ecuación?. Esta ecuación no tiene solución única, por el contrario, tiene infinitas soluciones: todos los pares de valores de r y p que satisfagan la ecuación serán solución, como por ejemplo:

r	p
0	6
1	-4
4	2
1/2	5

Para poder encontrar valores únicos de r y p necesitamos otra ecuación que relacione las dos incógnitas y que no sea equivalente a la anterior. De este modo la segunda ecuación también tendrá infinitas soluciones, pero si existe algún par de valores que está en los dos conjuntos de soluciones, tendremos una solución que satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

Ejemplo *Tomemos como nueva ecuación $2\,r - 3\,p = 2$. De modo que el sistema de ecuaciones que queremos resolver es el siguiente*

$$\begin{cases} 2r - p = 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 \end{cases}$$

Despejamos p de la primera ecuación:

$$p = 2r - 6$$

Despejamos p de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r - 3\,p &= 2 \\ 2\,r - 2 &= 3\,p \\ \frac{2\,r - 2}{3} &= p \end{aligned}$$

Algunas de las infinitas soluciones de estas ecuaciones son:

Las ecuaciones $2\,r - p = 6$ y $2\,r - 3\,p = 2$ no son equivalentes porque sus conjuntos solución no son iguales, sin embargo los valores $r = 4$ y $p = 2$ satisfacen ambas ecuaciones. Entonces se dice que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\,r - p = 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 \end{cases}$$

tiene solución única y es el par $r = 4$ y $p = 2$.

Para la primera ecuación

r	p
0	6
1	-4
4	2
1/2	5

Para la segunda ecuación

r	p
0	-2/3
1	0
4	2
1/2	-1/3

De acuerdo a la cantidad de soluciones que tenga el sistema se clasifican en:

Sistema compatible: Se dice que un sistema de ecuaciones es compatible cuando tiene solución.

- **Sistema compatible determinado:** Se dice que un sistema de ecuaciones es determinado cuando tiene solución única. Este caso se da cuando se tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, y además, las ecuaciones no son equivalentes.
- **Sistema compatible indeterminado:** Se dice que un sistema de ecuaciones es indeterminado cuando tiene infinitas soluciones. Este caso se da cuando se tienen menos ecuaciones que incógnitas, o cuando las ecuaciones son equivalentes.

Sistema incompatible: Se dice que un sistema de ecuaciones es incompatible cuando no tiene solución.

Métodos de resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones existen distintos métodos:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción por sumas y/o restas

Aquí sólo nos centraremos en el método por sustitución, los otros métodos están descriptos en la lectura adicional "Resolución de sistemas de ecuaciones".

La idea del método es despejar una variable de una de las ecuaciones del sistema y reemplazar la expresión encontrada en otra de las ecuaciones. En el caso de tener un sistema con más de dos incógnitas, este proceso hay que repetirlo hasta que consigamos una expresión en función de una de las incógnitas. De esta expresión podemos despejar la primera incógnita. Luego, reemplazamos el valor encontrado en las expresiones anteriores para ir encontrando los valores de todas las incógnitas.

Ejemplos: *Para ejemplificar este método resolveremos un sistema compatible determinado, uno compatible indeterminado y por último uno incompatible.*

Ejemplo 1: *Sistema compatible determinado*

$$\begin{cases} 2\,r - p = 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos p:

$$\begin{gathered} 2\,r - p = 6 \\ 2\,r - 6 = p \end{gathered}$$

y esta expresión la reemplazamos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r - 3\,p &= 2 \\ 2\,r - 3\,(2\,r - 6) &= 2 \\ 2\,r - 6\,r + 18 &= 2 \\ -4\,r + 18 &= 2 \end{aligned}$$

Así conseguimos una expresión en función de una sola incógnita. De aquí podemos despejar r:

$$\begin{aligned} -4\,r + 18 &= 2 \\ r &= \frac{2 - 18}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \end{aligned}$$

Para terminar de resolver el sistema reemplazamos el valor hallado para r en la expresión encontrada para p:

$$p = 2\,r - 6 = 2\,.\,4 - 6 = 2$$

De este modo vemos que el sistema tiene como solución el par de valores $r = 4$ *y* $p = 2$.

Ejemplo 2: *Sistema compatible indeterminado*

$$\begin{cases} 2\,r + 7\,p = -10 \\ -14\,r - 49\,p = 70 \end{cases}$$

Despejamos r de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -14\,r - 49\,p &= 70 \\ r &= \frac{70 + 49\,p}{-14} = \frac{\cancel{7}^{1}(10 + 7\,p)}{-\cancel{14}^{2}} = -\frac{10}{2} - \frac{7}{2}\,p = \\ r &= -5 - \frac{7}{2}\,p \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r + 7\,p &= -10 \\ 2\left(-5 - \frac{7}{2}\,p\right) + 7\,p &= -10 \\ \cancel{-10} - \cancel{7p} + \cancel{7p} &= \cancel{-10} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como llegamos a una identidad (una igualdad que se cumple para cualquier valor de p), resulta que existen infinitos valores de p y de r que satisfacen el sistema. Estas soluciones son de la forma $r = -5 - \frac{7}{2}\,p$.

Ejemplo 3: *Sistema incompatible*

$$\begin{cases} 2\,r + 7\,p = -10 \\ 2\,r + 7\,p = 3 \end{cases}$$

Despejamos p de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r + 7\,p &= -10 \\ p &= \frac{-10 - 2\,r}{7} = -\frac{10}{7} - \frac{2}{7}\,r \end{aligned}$$

y reemplazamos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r + 7\,p &= 3 \\ 2\,r + 7\left(-\frac{10}{7} - \frac{2}{7}\,r\right) &= 3 \\ \cancel{2r} - 10 - \cancel{2r} &= 3 \\ -10 &= 3 \ \text{ES ABSURDO} \end{aligned}$$

Como llegamos a un absurdo resulta que no existe ningún valor para r ni ningún valor para p que satisfaga el sistema.

Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas y clasifícalos.

$$a)\ \begin{cases} w \,=\, 2\,(v \,-\, w) \,+\, 1 \\ \dfrac{w \,-\, 2\,v}{2} \,=\, 1 \,-\, w \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a \,+\, b \,-\, c \,=\, 1 \\ 3\,c \,-\, 4\,a \,-\, b \,=\, -1 \\ 8\,a \,+\, 3\,b \,-\, 6\,c \,=\, 0 \end{cases}$$

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas son polinomios de segundo grado igualados a cero (obviamente el coeficiente principal debe ser distinto de cero):

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

donde a, b y c son números reales.

Este tipo de ecuaciones se resuelven utilizando lo que se conoce como **Fórmula de Bhaskara** dada por la expresión:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \qquad (2)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \qquad (3)$$

Donde x_1 y x_2 son las soluciones a la ecuación cuadrática y se obtuvieron de "despejar x" de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

La fórmula de Bhaskara es una fórmula que puede demostrarse, veamos como:

Demostración de la fórmula de Bhaskara

Lo que vamos a hacer es ir operando para poder llevar la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ a una ecuación equivalente de la forma:

$$(\text{algo}\,.\,x + \text{ALGO}\,)^2 = \text{otra}\,\text{cosa}$$

ya que de aquí es bastante simple despejar x.

Lo primero que vamos a hacer es multiplicar por a en ambos miembros:

$$\begin{aligned} a\,(a\,x^2 + b\,x + c) &= a\,.\,0 \\ a^2\,x^2 + a\,b\,x + a\,c &= 0 \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos y dividimos por 2 en el segundo término del primer miembro (de este modo seguimos manteniendo la igualdad porque estamos multiplicando el segundo término por uno):

$$\begin{aligned} a^2\,x^2 + \frac{2}{2}\,(a\,b\,x) + a\,c &= 0 \\ a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x + a\,c &= 0 \\ a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x &= -a\,c \end{aligned}$$

Sumamos $\dfrac{b^2}{4}$ en ambos miembros y reorganizamos utilizando la propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto y la propiedad conmutativa del producto:

$$\begin{aligned} a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x + \frac{b^2}{4} &= -a\,c + \frac{b^2}{4} \\ (a\,x)^2 + 2\,(a\,x)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - a\,c \end{aligned}$$

En esta última expresión podemos ver que el primer miembro es igual al cuadrado de un binomio (o un trinomio cuadrado perfecto). Por lo que podemos escribir que:

$$(a\,x)^2 + 2\,(a\,x)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Entonces, reemplazando esto en la ecuación, tenemos que:

$$\left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - a\,c$$

Esta última expresión ya tiene la forma a la que queríamos llegar:

$$(\underbrace{\text{algo}}_{a}\,.\,x + \underbrace{\text{ALGO}}_{\frac{b}{2}})^2 = \underbrace{\text{otra cosa}}_{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

Ahora lo que falta es despejar x. Para esto debemos aplicar raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{\left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

De acuerdo con la definición de módulo resulta que:

$$a\,x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

En el segundo miembro podemos sacar $\frac{1}{4}$ como factor común[1] y luego restar $\frac{b}{2}$ en ambos miembros. Utilizando la propiedad distributiva de la radicación obtenemos que:

$$\begin{aligned} a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}\,(b^2 - 4\,a\,c)} \\ a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \\ a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\frac{1}{2}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \\ a\,x &= \pm\frac{1}{2}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Finalmente dividimos por a en ambos miembros, sacamos factor común $\frac{1}{2}$ en el numerador y reordenamos el segundo miembro, así llegamos a la expresión que estábamos buscando:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm\frac{1}{2}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - \frac{b}{2}}{a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right)}{a} \\ &= \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Así demostramos que las dos soluciones buscadas se pueden expresar como función de los coeficientes del polinomio.

Una consecuencia importante de la expresión encontrada para las soluciones es que para que sean números reales, el argumento de la raíz debe ser igual o mayor que cero. Por esta razón a este argumento se lo llama **discriminante** y es el que determina la naturaleza de las raíces (si son números reales o no).

- **Si $\boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c > 0}$** $\Longrightarrow \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} > 0$ y por lo tanto, **tendremos dos raíces reales y distintas**.

$$x_1 = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$
$$x_2 = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

[1] Recuerden que el factor común es equivalente a la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma $a\,(b+c) = a\,b + a\,c$ pero leída de derecha a izquierda. Por lo tanto uno puede sacar como "factor común" a un factor que no es común si se lo piensa como una distribución. En este caso $\frac{1}{4}(b^2 - 4\,a\,c) = \frac{b^2}{4} - a\,c$.

- **Si $\boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c = 0}$** $\Longrightarrow \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} = 0$ y por lo tanto, **tendremos dos raíces reales e iguales**.

$$x_1 = x_2 = \frac{-\,b \pm 0}{2\,a} = \frac{-b}{2\,a}$$

- **Si $\boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c < 0}$** $\Longrightarrow \nexists \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ en reales y por lo tanto, **no tendremos raíces reales**.

De este análisis se puede ver que para conocer la naturaleza de las raíces no es necesario resolver la ecuación. Basta con conocer el discriminante.

Ejercicio

Calcule los valores de k para los cuales las siguientes funciones tienen dos raíces reales iguales y escriban su fórmula.

a) $f(x) = x^2 + 2\,k\,x + k$

b) $f(x) = -k + x^2 + (k - 1)\,x$

Casos especiales

Por lo que vimos anteriormente sabemos que las soluciones de cualquier ecuación cuadrática se pueden encontrar utilizando la fórmula de Bhaskara (ecuaciónes 2 y 3). Sin embargo hay algunas situaciones en que la ecuación puede resolverse de otra manera (que en general suele ser más sencilla).

- Coeficiente lineal nulo ($b = 0$):

$$\begin{aligned} a\,x^2 + c &= 0 \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

  En este caso la ecuación tendrá soluciones reales si a y c tienen signos opuestos.

- Coeficiente independiente nulo ($c = 0$):

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x &= 0 \\ x\,(a\,x + b) &= 0 \end{aligned}$$

  Para que un producto se anule es necesario que se anule alguno de los factores o que se anulen ambos. Entonces:

$$x\,(a\,x+b)=0 \Longrightarrow x=0 \ \text{ó} \ a\,x+b=0$$

En este caso las soluciones siempre son reales y distintas: $x_1=0$ y $x_2=-b/a$.

- Coeficiente independiente nulo y coeficiente lineal nulo ($b=c=0$):

$$\begin{aligned} a\,x^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ \therefore\ x_1=x_2 &= 0 \end{aligned}$$

En este caso las soluciones siempre son nulas.

Ecuaciones bicuadráticas

Se llaman bicuadráticas a las ecuaciones de la forma:

$$a\,x^4+b\,x^2+c=0 \tag{4}$$

Son polinomios de grado 4 igualados a cero, pero no cualquiera, por que los coeficientes que acompañan a x^3 y a x siempre valen cero. Este tipo de ecuaciones se puede resolver utilizando la fórmula de Bhaskara. Por esto se las conoce como ecuaciones bicuadráticas.

Sin embargo, la fórmula de Bhaskara sólo se puede utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas. Por lo tanto tenemos que hacer un cambio de variable para poder llevar la ecuación 4 a una de segundo grado.

La idea del cambio de variable es bastante simple: se define una nueva variable que esté en función de la variable original. En este caso la variable nueva que vamos a definir será:

$$y=x^2$$

Escribiendo la ecuación bicuadrática en función de nuestra nueva variable y obtenemos una ecuación cuadrática:

$$a\,x^4+b\,x^2+c=a\,(x^2)^2+b\,(x^2)+c=a\,y^2+b\,y+c=0$$

Por lo tanto, la ecuación que ahora debemos resolver es:

$$a\,y^2+b\,y+c=0$$

Las soluciones de esta última ecuación son:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\\
y_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}
\end{aligned}
$$

Luego, para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación 4 vamos a utilizar la relación entre las variables:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2\\
x &= \pm\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

Pero como tenemos dos expresiones para y tendremos 4 valores para x:

$$
\boxed{x = \begin{cases}
\sqrt{y} \Longrightarrow & \begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1} = \sqrt{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}\\[2ex] x_2 = \sqrt{y_2} = \sqrt{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}\end{cases}\\[6ex]
-\sqrt{y} \Longrightarrow & \begin{cases} x_3 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}\\[2ex] x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}\end{cases}
\end{cases}} \qquad (5)
$$

Estas son las 4 soluciones de la ecuación bicuadrática.

Ejercicio

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $y^4 - 1 = 0$

b) $\frac{1}{2}x^4 + 2 + x^3 - 3\,x^2 = 2\,x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2 + \frac{6}{8}x^3$

Sistemas de ecuaciones cuadráticas

Al igual que los lineales, los sistemas de ecuaciones cuadráticos constan de más de una ecuación y cada una de ellas tiene más de una incógnita (estas incógnitas son las mismas en todas las ecuaciones que forman el sistema).

Este tipo de sistemas de ecuaciones se resuelven con los mismos métodos que se utilizan para resolver las ecuaciones lineales.

Ejemplos: *Resolveremos dos sistemas de ecuaciones. El primero es un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, mientras que el segundo es un sistema mixto, es decir que una ecuación es cuadrática y la otra lineal. En ambos casos utilizaremos el método de sustitución descripto anteriormente.*

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y = 3\,x + 1 \\ y = -x^2 + 2\,x + 7 \end{cases}$$

Como $y = 3\,x + 1$ *de la primera ecuación, reeemplazamos* $y = 3\,x + 1$ *en la segunda ecuación:*

$$\begin{aligned} -x^2 + 2\,x + 7 &= 3\,x + 1 \\ -x^2 + 2\,x + 7 - 3\,x - 1 &= 0 \\ -x^2 - \,x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación sabemos resolverla mediante Bhaskara. Por lo tanto hay dos posibles soluciones:

$$x \;=\tfrac{1 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

Entonces las soluciones al sistema serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Es decir, los puntos (-3,-8) y (2,7) satisfacen el sistema.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} y \,-x^2 = 4 \\ 4\,x \,+\, y = 0 \end{cases}$$

Para resolverlo despejamos y *de la primera ecuación:*

$$\begin{aligned} y \,- x^2 &= 4 \\ y \;&=\; 4 + x^2 \end{aligned}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$4\,x + 4\, + x^2 \;=\; 0$$

Entonces, resolvemos esta ecuación por Bhaskara,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Entonces las soluciones al sistema serán:

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -2$$

Así, las soluciones son $(-2, 8)$ *y (-2,8).*

Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = 4\,x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2\,x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - 2 = x^2 \\ y = 3\,x - 2 \end{cases}$

Las ecuaciones polinómicas de grado mayor a 2 (excepto las bicuadráticas), son mucho más complicadas de resolver. De ser posible, hay que factorizar el polinomio, así obtenemos un producto de polinomios de menor grado igualado a cero. Luego las soluciones se encuentran anulando cada factor.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 = 0 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \\ x^2(x-2)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos factorizada la expresión, podemos resolverla, igualando cada factor a 0:

$$\begin{aligned} x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \\ (x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 \\ (x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Hemos igualado a cero por que para que un producto sea igual a cero, alguno de sus factores debe ser igual a cero.

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son aquellas que involucran divisiones de polinomios, es decir que son de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios cualesquiera (y $Q(x)$ debe ser distinto del polinomio nulo). En este tipo de ecuaciones, **las soluciones serán aquellas que anulen a $\boldsymbol{P(x)}$ y no anulen a $\boldsymbol{Q(x)}$. Los valores que anulen a $\boldsymbol{Q(x)}$ NO SERÁN SOLUCIÓN**.

Raíces espúreas

Las raíces espúreas son "raíces falsas". En general, en este tipo de ecuaciones, son valores que anulan simultáneamente al numerador y al denominador.

Ejemplo: *Resolvamos la siguiente ecuación:*

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 0$$

Para que una división se anule, es necesario que se anule el numerador, por lo tanto tendremos que:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Aquí es donde hay que tener cuidado porque si uno decide que las soluciones de la ecuación son los valores $x = 1$ y $x = -1$ va a cometer un grave error.

Veamos cuáles de estos valores satisfacen, realmente, la ecuación

$$\begin{array}{llll} \text{Si } x = 1 & \Longrightarrow \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1-1}{1-1} \text{ Intedermenado} & \Longrightarrow & x = 1 \text{ no es solución} \\ \text{Si } x = -1 & \Longrightarrow \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1-1}{-1-1} = \dfrac{0}{2} = 0 & \Longrightarrow & x = -1 \text{ es solución} \end{array}$$

De aquí vemos que el valor $x = 1$ es una raíz espúrea porque no puede ser solución ya que anula al denominador. Mientras que $x = -1$ es solución.

Por esto es importante ***definir el conjunto de validez de la ecuación****, esto es indicar para qué valores está definida la expresión dada. Es este caso serán los valores que no anulen al denominador. Entonces, la forma correcta de resolver la ecuación anterior sería la siguiente:*

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x-1} &= 0 \quad \text{con } x \neq 1\\ x^2-1 &= 0\\ x &= \pm 1\end{aligned}$$

Pero como $x \neq 1$, resulta que $x = -1$ es la solución de la ecuación.

Pérdida de raíces

En el caso anterior vimos que, de acuerdo al método elegido para resolver la ecuación, pueden aparecer raíces espúreas, pero también puede suceder que se pierdan raíces.

Ejemplo: *Resolvamos la siguiente ecuación:*

$$\frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} = \frac{8\,x+24}{2\,x-4}$$

La manera intuitiva de resolverla sería la siguiente: primero factorizar todas las expresiones y luego simplificar todos los factores que sean posibles:

$$\begin{aligned}\frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} &= \frac{8\,x+24}{2\,x-4}\\ \frac{[x\,(x+3)]\,[x\,(x+2)]}{(x+2)(x-2)} &= \frac{8\,(x+3)}{2\,(x-2)}\\ \frac{x^2\,\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} &= \frac{\cancelto{4}{8}\,\cancel{(x+3)}}{\cancelto{1}{2}\,\cancel{(x-2)}}\\ x^2 &= 4\\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

Sin embargo $x = 2$ y $x = -2$ son raíces espúreas porque anulan los denominadores. Por lo tanto, siguiendo este camino la ecuación no tiene solución. Pero esto no es cierto ya que $x = -3$ satisface la ecuación. Para resolver este dilema nunca hay que perder de vista que simplificar es dividir, y para dividir hay que asegurarse que el divisor sea distinto de cero. Este hecho es lo que indica que ***la resolución anterior está incompleta****.*

Veamos cómo sería ***la resolución correcta****:*

$$
\begin{aligned}
\frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} &= \frac{8\,x+24}{2\,x-4} \\
\frac{[x\,(x+3)]\,[x\,(x+2)]}{(x+2)(x-2)} &= \frac{8\,(x+3)}{2\,(x-2)} \quad \text{con}\, x \neq 2,\ x \neq -2 \\
\frac{x^2\,\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} &= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\,\cancel{(x+3)}}{\underset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{(x-2)}} \quad \text{si}\, x \neq -3 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

$x = \pm 2$ está fuera del conjunto de validez, por lo que no son solución. *Pero ahora* ***hay que ver qué pasa con $x = -3$*** *porque es un valor que excluimos por el método que elegimos para resolver la ecuación pero pertenece al conjunto de validez. Entonces si $x = -3$*

$$
\begin{aligned}
\frac{[(-3)^2+3\,(-3)]\,[(-3)^2+2\,(-3)]}{(-3)^2-4} &= \frac{8\,(-3)+24}{2\,(-3)-4} \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $x = -3$ es la solución de la ecuación.

Ejercicio:

Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\dfrac{x\,-\,2}{x^2\,-\,3\,x} + \dfrac{19\,x}{x^2} = \dfrac{-4\,x^2\,+\,3\,x\,-\,9}{x^2\,-\,3\,x}$

b) $\left(\dfrac{3\,x\,-\,3}{x^2\,-\,2\,x\,+\,1}\right)\left(\dfrac{x\,-\,1}{x\,+\,2}\right) = \dfrac{5\,x\,+\,2}{10\,x\,+\,4} : \dfrac{1}{2\,x}$

Ecuaciones no algebraicas

En este tipo de ecuaciones la incógnita forma parte del argumento de alguna función no algebraica, como por ejemplo raíces, logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas. Algunos ejemplos se pueden ver en la lectura adicional “Ecuaciones no algebraicas”.

Desigualdades o Inecuaciones

En álgebra, algunos problemas originan **desigualdades** en lugar de ecuaciones.

Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\geq$ ó $\leq$.

Aquí tenemos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \;\leq\; 19$$

Sólo algunos valores de x satisfacen esa desigualdad, por ejemplo:

$$x = 2 \implies 15 \;\leq\; 19$$
$$x = 3 \implies 19 \;\leq\; 19$$

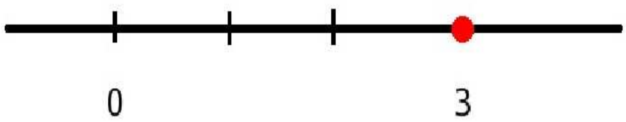
Pero sí, por ejemplo, $x = 5$, la desigualdad no se cumple:

$$x = 5 \implies 27 \;\leq\; 19$$

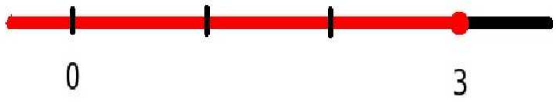
Comprueben ustedes que si $x = 4$ tampoco se cumple que $4x + 7 \;\leq\; 19$.

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales. La ilustración que sigue muestra cómo una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

La ecuación $4x + 7 = 19$, tiene como solución $x = 3$ y la gráfica correspondiente es la siguiente:



La desigualdad $4x + 7 \;\leq\; 19$, tiene como solución los x tales que: $x \;\leq\; 3$ y la gráfica correspondiente es la siguiente:



Para resolver desigualdades, aplicamos las siguientes reglas que nos permiten aislar la variable a un lado del signo de la desigualdad. Estas reglas indican cuándo dos desigualdades son **equivalentes**. En estas reglas,los símbolos A, B, C y D son números reales o expresiones algebraicas. Aquí establecemos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero se aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

Regla de desigualdades

1. $A \leq B \Longleftrightarrow A+C \leq B+C$
2. $A \leq B \Longleftrightarrow A-C \leq B-C$
3. Sí $C > 0 \implies A \leq B \iff CA \leq CB$
4. Sí $C < 0 \implies A \leq B \iff CA \geq CB$
5. Sí $A > 0$ y $B > 0 \implies A \leq B \iff \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
6. Sí $A \leq B$ y $C \leq D \implies A+C \leq B+D$

Descripción:

1. **Sumar** la misma cantidad a cada miembro de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. **Restar** la misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. **Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad positiva da una desigualdad equivalente.
4. **Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad negativa invierte la dirección de la desigualdad.
5. **Obtener los recíprocos** de ambos miembros de una desigualdad que contiene cantidades positivas invierte la dirección de la desigualdad.

6. Las desigualdades se pueden sumar.

Poné especial atención a las reglas 3 y 4. La regla 3 establece que podemos multiplicar (o dividir) cada miembro de una desigualdad por un número positivo, pero la regla 4 señala que si multiplicamos cada miembro de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad:

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos:

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, tenemos:

$$-6 > -10$$

Veamos un ejemplo:

Sea la desigualdad:

$$3x \ \leq \ 9x + 4$$

Sustracción de $9x$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$$

Simplificación

$$-6x < 4$$

Multiplicación por $\frac{-1}{6}$

$$\left(\frac{-1}{6}\right)(-6x) > \left(-\frac{1}{6}(4)\right)$$

Simplificación

$$x > -\frac{2}{3}$$

El conjunto solución consta de todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(\frac{-2}{3}, \infty\right)$.

Desigualdad con valores absolutos

Aplicamos las propiedades siguientes para resolver desigualdades que contienen valores absolutos.

Regla de desigualdades

1. $|x| < c \qquad -c < x < c$
2. $|x| \leq c \qquad -c \ \leq \ x \ \leq \ c$
3. $|x| > c \qquad x < -c$ ó $c < x$
4. $|x| \geq c \qquad x \geq -c$ ó $c \geq x$

Veamos un ejemplo,

$$|x - 5| < 2$$

Esta igualdad equivale a:

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad } \ 1$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Suma } \ \text{de } \ 5$$

El conjunto solución es el intervalo abierto (3,7).

Como último ejemplo, resolvamos la siguiente desigualdad y encontremos el conjunto solución.

$$\frac{1}{x} < 1, \quad \forall \ x$$

Primero tenemos que descartar el 0 del conjunto solución; $x \neq 0$

- Si $x > 0$, entonces, $\frac{1}{x} < 1$

$$x * \frac{1}{x} < 1 * x$$

$$1 < x \Longrightarrow x > 1$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x > 1$.

- Si $x < 0$, entonces, $\frac{1}{x} < 1$ queda así:

$$x * \frac{1}{x} > 1 * x$$

El signo se invierte por que multiplicamos por x a ambos lados, siendo $x < 0$. Luego,

$$1 > x \Longrightarrow x < 1$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x < 1$.

$\therefore$ El conjunto solución total son los x tales que $x < 1$, $x > 1$ y $x \neq 0$, o sea, $-\infty < x < 0 \ \cup \ 0 < x < \infty$.

Veamos otro ejemplo,
Resolvamos la ecuación $|x - 2| > 3$ usando la definición de valor absoluto:

- Si $x - 2 > 0$, entonces, $x > 2$ y $x - 2 > 3$. Por lo tanto,

$$x > 3 + 2 \Longrightarrow x \ > \ 5$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x > 2$ y $x > 5$, o sea, los x tales que $x \in (5, \infty)$.

- Si $x - 2 < 0$, entonces, $x < 2$ y $-(x - 2) > 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -x \ + \ 2 &> 3 \\ -x \ &> 3 - \ 2 \\ -x \ &> 1 \\ x \ &< \ -1 \end{aligned}$$

El signo se invierte por que multiplicamos por -1 a ambos lados.

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x < 2$ y $x < -1$, o sea, los x tales que $x \in (-\infty, -1)$.

$\therefore$ El conjunto solución total son los x tales que $x < -1$, $x > 5$, o sea, los x tales que $x \in -\infty < x < -1 \ \cup \ 5 < x < \infty$.

Resolución de Problemas

Problema 1: La mitad de la suma de un número y 2 es igual al triple de dicho número más 8/5. Calcúlalo.

Lo primero que hay que hacer para resolver este tipo de problemas es asegurarse de haber entendido bien el enunciado. Una vez que entendimos qué es lo que hay que hacer, tenemos que escribir el problema en lenguaje matemático, es decir, escribir las ecuaciones que representan la situación que se plantea.

En este caso debemos encontrar un número, que lo llamaremos x (para no perder la originalidad). Entonces, desmenucemos el enunciado para poder ir escribiendo la ecuación:

$$\overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{(x+2)}_{\text{suma de un número y 2}}}^{\text{La mitad de la suma de un número y 2}} \overbrace{=}^{\text{es igual a}} \overbrace{\underbrace{3x}_{\text{triple de dicho número}} + \frac{8}{5}}^{\text{el triple de dicho número más 8/5}}$$

Ahora para encontrar el número hay que resolver la ecuación.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+2) &= 3x + \frac{8}{5} \\
\frac{1}{2}x + 1 &= 3x + \frac{8}{5} \\
\frac{1}{2}x - 3x &= \frac{8}{5} - 1 \\
\frac{-5}{2}x &= \frac{3}{5} \\
x &= \frac{3}{5}\,\frac{2}{-5} = -\frac{6}{25}
\end{aligned}$$

De este modo, el número buscado es el $-\frac{6}{25}$.

Problema 2: La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

Sí, estoy de acuerdo, este problema es un trabalenguas. Pero si leemos cuidadosamente el enunciado, vamos a poder resolverlo.

El problema habla de la edades de tres personas: un padre y sus dos hijos. En este tipo de problemas, lo que suele ser más cómodo es que las incógnitas sean las edades actuales. Siguiendo esta idea, **llamaremos P, H_1 y H_2 a las edades actuales del padre y de sus dos hijos,**

respectivamente. Implícitamente sabemos que la edad del padre es mayor que la de sus hijos y, en principio, los hijos no son gemelos ni mellizos, por lo que uno será mayor que el otro. Por lo tanto $P > H_1 > H_2$. **Es muy importante definir las incógnitas antes de plantear las ecuaciones**, porque las ecuaciones pueden variar dependiendo de las incógnitas elegidas.

Ahora, para ir planteando las ecuaciones del problema analicemos el enunciado.

Entonces, comencemos a leer el problema:

- "*La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos...*"

  De acuerdo a nuestras variables, esta ecuación es bastante sencilla de plantear.

  $$P = 2\,(H_1 + H_2) \tag{6}$$

- "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos.*"

  Esta parte se complica un poco. Veamos. "*...la diferencia de las edades actuales de los hijos..*" no es otra cosa que $H_1 - H_2$.

  Ahora "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era ...*". Esto significa que a la edad actual del padre hay que restarle la diferencia de las edades actuales de los hijos, de este modo obtenemos la edad que tenía el padre en "*...aquel tiempo...*", esto es, $P - (H_1 - H_2)$.

  Por otro lado sabemos que el tiempo pasa de la misma manera para todos (a menos que alguien haya descubierto el secreto de la juventud eterna), por lo tanto las edades de los hijos "*...en aquel tiempo...*" eran $H_1 - (H_1 - H_2)$ y $H_2 - (H_1 - H_2)$, respectivamente.

  Retomemos la frase completa: "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos.*". Por lo tanto, la ecuación que le corresponde será la siguiente

  $$P - (H_1 - H_2) = 3\,\{[H_1 - (H_1 - H_2)] + [H_2 - (H_1 - H_2)]\}$$

  Sacando los paréntesis la ecuación se reduce a

  $$P - H_1 + H_2 = 3\,(3\,H_2 - H_1) \tag{7}$$

- "*Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años.*"

Esta parte es parecida a la anterior. "*...tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos*" es igual a $H_1 + H_2$. Como esta cantidad de años pasa para todos, en ese momento las edades que tendrán serán: $P + (H_1 + H_2)$, $H_1 + (H_1 + H_2)$ y $H_2 + (H_1 + H_2)$ para el padre y sus dos hijos, respectivamente. Entonces, si en ese momento la suma de las tres edades es igual a 150 años, la relación que tendremos es:

$$[P + (H_1 + H_2)] + [H_1 + (H_1 + H_2)] + [H_2 + (H_1 + H_2)] = 150$$

Sumando los términos semejantes resulta que:

$$P + 4\,H_1 + 4\,H_2 = 150 \tag{8}$$

De este modo, para hallar las edades de las tres personas hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones 6, 7 y 8:

$$\begin{cases} P = 2\,(H_1 + H_2) \\ P - H_1 + H_2 = 3\,(3\,H_2 - H_1) \\ P + 4\,H_1 + 4\,H_2 = 150 \end{cases}$$

Para hallar el valor de P reemplazamos la ecuación 6 en la 8:

$$\begin{aligned} P + 4\,H_1 + 4\,H_2 &= 150 \\ P + 2\,[2\,(H_1 + H_2)] &= 150 \\ P + 2\,P &= 150 \\ 3\,P &= 150 \\ P &= \frac{150}{3} = 50 \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que $H_1 = \frac{1}{2}\,P - H_2$. Reemplazando esto y que $P = 50$ en la ecuación 7 encontramos el valor de H_2:

$$\begin{aligned} P - H_1 + H_2 &= 3\,(3\,H_2 - H_1) \\ P - H_1 + 3\,H_1 &= 9\,H_2 - H_2 \\ P &= 8\,H_2 - 2\,H_1 \\ P &= 8\,H_2 - 2\left(\frac{1}{2}\,P - H_2\right) \\ P + P &= 8\,H_2 + 2\,H_2 \\ 2\,P &= 10\,H_2 \\ H_2 &= \frac{1}{5}\,P = 10 \end{aligned}$$

Finalmente como $P = 50$ y $H_2 = 10$, resulta que:

$$H_1 = \frac{1}{2}\,P - H_2 = \frac{1}{2}\,50 - 10 = 15$$

Hemos encontrado las edades actuales de las tres personas: el padre tiene 50 años, el hijo mayor tiene 15 años y el menor tiene 10 años. Sin embargo esta no es la respuesta al problema, por que lo que se pregunta es "*¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?*". Entonces, cuando nació el primer hijo, el padre tenía $P - H_1 = 35$ años, mientras que cuando nació el segundo tenía $P - H_2 = 40$ años.

PRÁCTICA 4

1. Halla, cuando sea posible, los valores de la incógnita que verifiquen las siguientes igualdades justificando tu respuesta.

   a) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1} - \dfrac{3}{2}\,x = \sqrt[3]{-\dfrac{8}{125}}$

   b) $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{2} \div (-2) = \dfrac{1}{4}\,x$

   c) $0{,}3\,x \div 0{,}2 - 0{,}1\,x\,(-16) = \sqrt{1{,}69} + 0{,}5^2$

   d) $(x - 3)\,(x^2 + 1) = (x - 1)^3$

   e) $|2\,x + 4| = 2$

   f) $|2\,x + 1| = 3$

   g) $|3\,x| = |x| - 1$

   h) $6\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$

   i) $2\,(1 - k) + (k - 1)^2 = 2\,k$

   j) $\dfrac{6}{m} - \dfrac{9}{m^2} - 1 = 0$

k) $\dfrac{1}{t - 1} + \dfrac{2}{t + 1} = \dfrac{t^2 - 5}{t^2 - 1}$

l) $\dfrac{h^2 - 4}{h^2 + 10 - 7h} = \dfrac{\frac{1}{2}}{h - 2}$

m) $\dfrac{y^2}{y^2 - 4} - \dfrac{y + 2}{y^3 - 2y} = \dfrac{2}{y^2 + 2y}$

n) $\dfrac{2x + 1}{x + 3} = 1 + \dfrac{x + 3}{x - 1}$

ñ) $\dfrac{a + 4}{a - 4} - \dfrac{a - 4}{a + 4} = \dfrac{(2a)^2}{a^2 - 16}$

o) $\dfrac{-1 + r^2 - 2r}{-(1 - r^2)} = \dfrac{2}{r + 1}$

p) $x^4 - 2x^2 = 4 + x^2$

q) $2(a^4 - 1) = 3a^2$

2. Determina la naturaleza de las raíces sin resolver la ecuación.

    a) $-(1 - 2x^2) = x$

    b) $9z^2 - 6z - 17 = 0$

    c) $9 = 4w(1 - w)$

    d) $17y^2 = 0$

3. Resuelve los siguientes sistemas, en los que se pueda también resuélvelos de forma gráfica y clasifícalos.

a) $\begin{cases} 2\left(x - \dfrac{y}{2}\right) = x + y \\ y = \dfrac{2}{3}x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\,x + 2\,y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -5\,x + 5\,y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,(x - 3\,y) = 5 - 3\,(\,2\,y - 1) \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{x + 2\,y}{4} + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} w = 3\,z + 1 \\ w - 7 = -z^2 + 2\,z \end{cases}$

f) $\begin{cases} b - a^2 = 4 \\ 4\,a + b = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3\,x - y + z = 3 \\ -\,z + 2\,x = 2 - y \\ 5\,z - 5 = y - x \end{cases}$

h) $\begin{cases} n - 1 = m + p \\ 2\,m - 1 = p - n \\ m + 2\,n = 2\,p \end{cases}$

4. Plantea y resuelve al menos 4 problemas de cada tipo.

   a) Ecuaciones:

      I. Hallen los números reales que verifiquen que el doble de su cuadrado más la mitad de su triple es igual a 0.
      II. Si el cuadrado de un número es igual al opuesto de ese mismo número, ¿de qué números hablamos?
      III. El cuádruplo de la diferencia entre un número y 1, menos la mitad de la suma entre dicho número y tres es $-2,7$. Calcúlalo.
      IV. El producto entre un número y su anterior es igual a 12. Encuentra dicho número natural.
      V. Encuentra el número más chico que satisface que la suma entre su cuarta potencia y 4 es 5 veces su cuadrado.
      VI. El opuesto de la suma de un número y 2 es igual al doble de la suma entre dicho número y su cuadrado. Encuentra el número en cuestión.

   b) Sistemas de 2 ecuaciones:

      I. El perímetro de un rectángulo es el triple de su base y la base mide 3 m más que la altura. ¿Cuál es la medida de la base y la altura?
      II. Encuentra dos números sabiendo que su promedio es doce y su diferencia ocho.
      III. En una heladera hay 22 latas de gaseosa, unas de $1/3$ lt, y otras de $1/5$ lt. En total contienen 6 litros. ¿Cuántas latas de cada capacidad hay?
      IV. Si en una fracción desconocida se suma 2 al numerador, el valor de la fracción queda igual a $1/2$. Por el contrario, si se suma 1 al denominador, queda $1/3$. Halla la fracción.
      V. De un terreno rectangular de 340 m de contorno, el municipio ha expropiado una banda de 15 m de ancho en el frente. En compensación, ha cedido al terreno otra banda de 10 m de ancho en un lateral. Con todo, el terreno cuenta ahora con 200 m^2 menos de superficie que antes. ¿Cuáles eran sus dimensiones originales?
      VI. Hallen las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su altura es 3 cm mayor que su base y que su superficie es 70 cm^2.
      VII. Se tienen dos cortes de tela. La longitud de uno de ellos es 8 metros menor que la del otro. Si se multiplican las longitudes de ambos cortes, el resultado es de 20 m^2. ¿Cuál es la longitud del corte más largo?
      VIII. Un alumno realiza un examen tipo "test" que consta de 20 preguntas. Cada acierto supone 0,5 puntos y por cada respuesta errada o no respondida se restan 0,25 puntos. Calcula el número de aciertos si obtuvo al final 7 puntos.
      IX. Un comerciante mezcla café de Colombia con café de Brasil para obtener una calidad intermedia. Si los mezcla en proporciones 2 a 3 (por cada 2 kg. de Colombia se añaden

3 kg. de Brasil), la mezcla resulta a 35,40 \$/kg, mientras que con la proporción 2 a 1, el precio sería 25,00 \$/Kg. ¿Cuál es el precio del kilogramo de cada clase de café?

x. El 40 % de los estudiantes de 1° A son varones, y la cuarta parte de los de 1° B son mujeres. En total son 33 chicos y 25 chicas. ¿Cuántos alumnos tiene cada grupo?

xi. Los lados de un rectángulo son dos números consecutivos. Hallar la longitud de ambos lados si la superficie del rectángulo es igual a 2 m^2.

xii. Un comerciante compra un corte de tela de 60 m a \$300. Vende una cierta parte a \$6 el metro, y el resto a \$10 el metro. Si la ganancia fue de \$100, ¿cuánto mide cada una de las partes?

c) Sistemas de 3 ecuaciones

i. En un grupo de 69 estrellas las hay de tres clases: las B, las A y las F. Calcular el número de estrellas tipo B sabiendo que las estrellas F son el doble que las de tipo A, y que las B son una menos que la mitad de las de tipo A.

ii. Las medidas en centímetros de la hipotenusa y el cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?

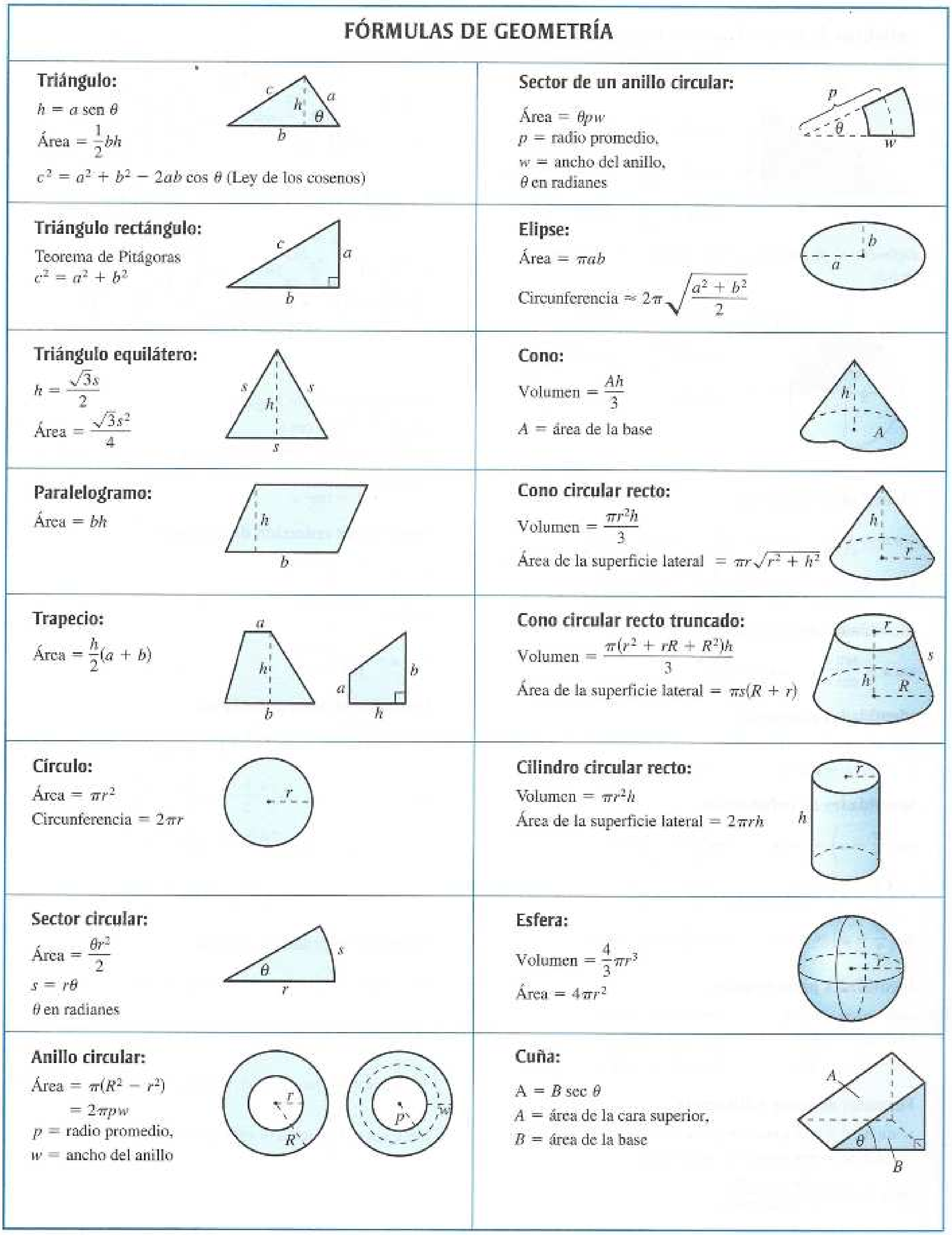
iii. Según datos provistos por la Unión Astronómica Internacional, el número de satélites naturales del planeta Júpiter supera en uno a los de Saturno y Urano sumados. Calcular el número de satélites de cada planeta sabiendo, además, que la suma de los satélites de Saturno más el duplo de los de Urano es igual al número de satélites de Júpiter más 20, y que Saturno tiene nueve satélites más que Urano.

iv. Hace 16 años, Érika tenía 2/3 de la edad que tenía Damián. Por otra parte, hace 43 años, Damián tenía el triple de la edad de Mónica. Si dentro de 8 años la edad de Érika será la que actualmente tiene Mónica, hallar la edad de los tres.

v. Entre Batman, Superman y Flash han ahorrado \$100. Como Batman necesita reparar su batimóvil, Superman le presta \$20, quedando en ese momento ambos con el mismo dinero. Flash, por su parte, gasta \$10 en botas nuevas, quedándose con un monto igual a la mitad del dinero original que tenían Batman y Superman juntos. Calcular la cantidad de dinero que cada superhéroe tenía al comienzo.

vi. Si Harry le prestara su libro de Pociones a Ron, ambos tendrían la misma cantidad de libros. Por otra parte, Hermione tiene un libro más que los de Harry y Ron juntos. Hallar la cantidad de libros que tiene cada uno, sabiendo que el total de libros que tienen entre los tres es 13.

vii. La edad de Agustina es un quinto de la edad de Nadia. Las edades de ambas, sumadas, dan la edad de Margot. Hace cinco años, la edad de Nadia era nueve veces más grande que la de Agustina. Hallar la edad actual de las tres.



FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

Triángulo:

$h = a \operatorname{sen} \theta$

Área $= \frac{1}{2}bh$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ (Ley de los cosenos)

Sector de un anillo circular:

Área $= \theta p w$

$p =$ radio promedio,

$w =$ ancho del anillo,

θ en radianes

Triángulo rectángulo:

Teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$

Elipse:

Área $= \pi ab$

Circunferencia $\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Triángulo equilátero:

$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$

Área $= \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$

Cono:

Volumen $= \frac{Ah}{3}$

$A =$ área de la base

Paralelogramo:

Área $= bh$

Cono circular recto:

Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Trapecio:

Área $= \frac{h}{2}(a + b)$

Cono circular recto truncado:

Volumen $= \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

Área de la superficie lateral $= \pi s(R + r)$

Círculo:

Área $= \pi r^2$

Circunferencia $= 2\pi r$

Cilindro circular recto:

Volumen $= \pi r^2 h$

Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$

Sector circular:

Área $= \frac{\theta r^2}{2}$

$s = r\theta$

θ en radianes

Esfera:

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área $= 4\pi r^2$

Anillo circular:

Área $= \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi p w$

$p =$ radio promedio,

$w =$ ancho del anillo

Cuña:

$A = B \sec \theta$

$A =$ área de la cara superior,

$B =$ área de la base

Figura 1: Anexo de fórmulas útiles - Precálculo, Larson 2011