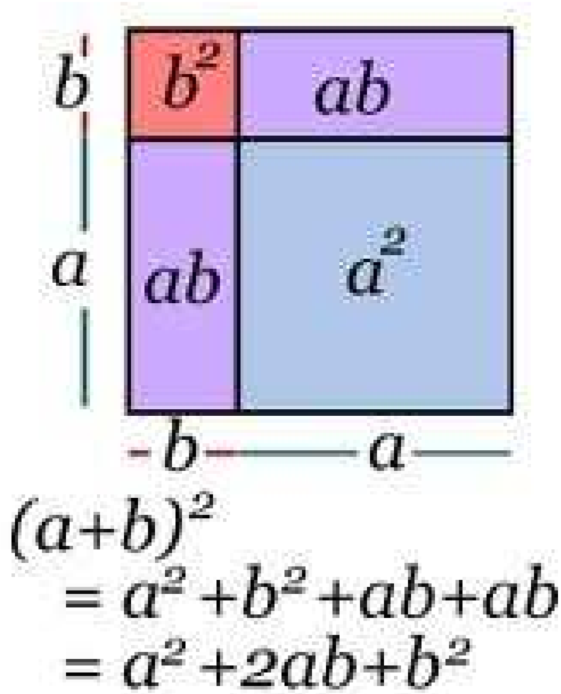
CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

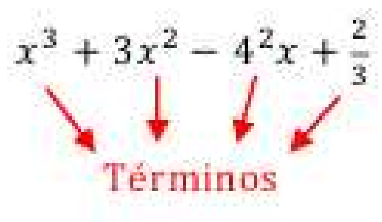
Módulo 2: Expresiones polinómicas. Factorización



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACTORIZACIÓN

Una expresión polinómica es (justamente) una expresión formada por sumas y restas de términos, como por ejemplo:



Es decir, es la expresión de un cálculo que involucra sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias entre números reales, **para las variables sólo admite potencias naturales**. Otros ejemplos son:

$$3a^2 - 2b^3 + 9ab$$
$$5x^2 + 2x - 1$$
$$2a + 5x^2 - 7^4bx + \frac{4}{9}$$

El grado de un polinomio es el exponente mayor al que esta elevado la variable. En el caso del ejemplo inicial el grado es 3. Analizaremos en más detalle a las expresiones polinómicas en el Módulo 4.

Factorización

Factorizar significa "transformar en multiplicación". Partimos de una expresión polinómica formada por sumas y/o restas de términos y llegamos a otra expresión equivalente que es una multiplicación de otros polinomios de menor grado posible. Estos polinomios de grado menor son los polinomios primos o irreducibles, aquellos polinomios que no pueden seguir factorizandose, es decir, no pueden ser descompuestos en polinomios de grado más chico. Por ejemplo:

$$x^2 + 3x^3 + 2 \Longleftrightarrow (x + 2)(x + 1)$$

Estas dos expresiones son equivalentes, es decir, significan lo mismo.

Utilizando las propiedades de la suma, el producto y la potencia podemos definir 5 casos de factoreo. Sean a, b, c y d números reales.

1. **Factor común**, consiste en la aplicación recíproca de la propiedad distributiva

$$\boxed{a\,b + a\,c = a\,(b + c)} \tag{1}$$

2. **Factor común en grupos**, consiste en utilizar la idea de factor común pero en este caso el factor común es una suma (o una resta)

$$a\,b + c\,d + a\,d + c\,b = a\,(b + d) + c\,(b + d) = (b + d)(a + c)$$

Entonces, el factor común en grupos resulta en:

$$\boxed{a\,b + c\,d + a\,d + c\,b = (b + d)(a + c)} \tag{2}$$

Ejercicio

Factorizá las siguientes expresiones mediante extracción de factor común o factor común en grupos según corresponda.

a) $2\,x^4 - x^3 - 6\,x^2 =$

b) $y^6 - y^2 =$

c) $-w^3 + 16\,w =$

d) $3\,n^5 + n^4 - 3\,n - 1 =$

e) $-2\,h^5 + 12\,h^4 - 18\,h^3 + 2\,h^2 - 12\,h + 18 =$

---

3. **Trinomio cuadrado perfecto:**

En este caso de factoreo utilizamos la siguiente identidad:

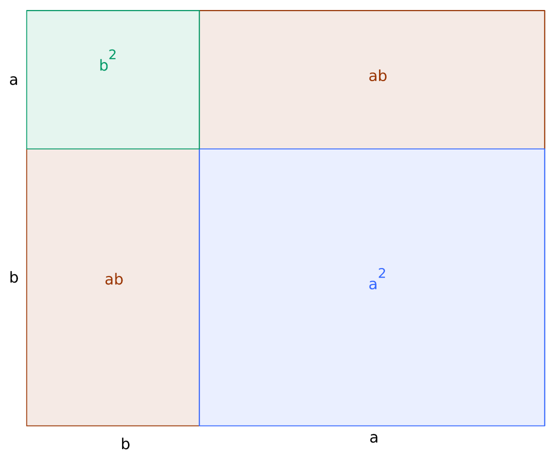
$$\boxed{a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2} \tag{3}$$

La identidad nos dice que el *trinomio cuadrado perfecto*, que es la expresión del lado izquierdo de la igualdad, es igual, al *cuadrado de un binomio*, la expresión del lado derecho.

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned} a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 &= a^2 \pm a\,b \pm a\,b + b^2 \\ &= a\,(a \pm b) \pm b\,(a \pm b) \\ &= (a \pm b)(a \pm b) \\ &= (a \pm b)^2 \end{aligned}$$

También existe una forma gráfica de ver esta igualdad: supongamos un cuadrado que tiene una longitud de $(a + b)$ de lado.



Luego, al calcular la superficie del cuadrado obtenemos la expresión del trinomio cuadrado perfecto $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$.

Ejercicios

1. Escribe V o F según corresponda y justifica tu respuesta.
   a) $c^2 - 2c + 1 = (c + 1)^2$
   b) $d^2 + 8d + 16 = (d + 4)^2$
   c) $f^2 - 1 + 2f = (1 - f)^2$
2. Expresá cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.
   a) $4z^2 - 4z + 1 =$
   b) $3k + k^2 + \dfrac{9}{4} =$
   c) $4 + a^6 + 4a^3 =$
   d) $-\dfrac{4}{3}s + \dfrac{4}{9} + s^2 =$

4. Cuatrinomio cubo perfecto:

Utilizamos la siguiente identidad:

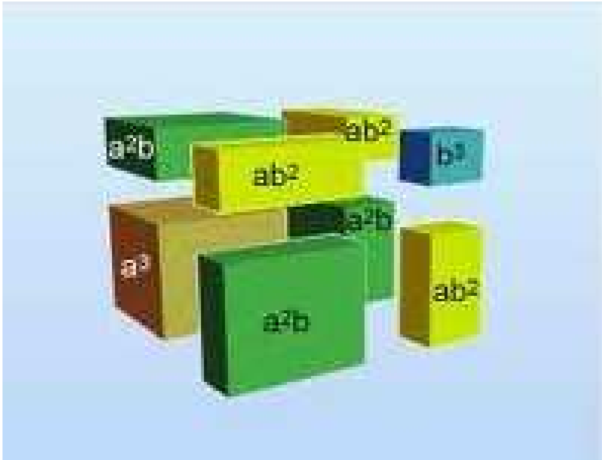
$$\boxed{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3} \tag{4}$$

En este caso, el *cuatrinomio cubo perfecto* (expresión a la izquierda de la igualdad) es igual al *cubo de un binomio* (expresión a la derecha de la igualdad).

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned} a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 &= [a^3 \pm a^2b] + [\pm 2a^2b + 2ab^2] + [ab^2 \pm b^3] \\ &= a^2(a \pm b) \pm 2ab(a \pm b) + b^2(a \pm b) \\ &= (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) \\ &= (a \pm b)^2(a \pm b) \\ &= (a \pm b)^3 \end{aligned}$$

Esto también se puede representar geométricamente. Ahora la idea es calcular el volumen de un cubo cuyos lados miden $(a + b)$ y así se obtiene que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



Ejercicios

1. Escribe V o F según corresponda y justifica tu respuesta.
   a) $1 + 3m^2 - 3m - m^3 = (1 - m)^3$
   b) $-27v^2 + v^3 - 27 + 9v = (v - 3)^3$
   c) $w^3 - 9w^2 + 27w + 27 = (w + 3)^3$
2. Expresá cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.
   a) $p^3 + 15p^2 + 75p + 125 =$
   b) $\frac{1}{8}x^3 - 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x =$
   c) $48h - 12h^2 - 64 + h^3 =$
   d) $\frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q + q^3 + \frac{1}{8} =$

5. Diferencia de cuadrados:

En este caso utilizamos lo siguiente:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)} \tag{5}$$

Nos sirve cuando tenemos una resta de dos cosas que están elevadas al cuadrado.

Para demostrar este caso lo que se utiliza como estrategia es sumar cero ya que $a+0 = a$. Pero el cero se puede escribir de muchas maneras distintas: por ejemplo $0 = a - a$, $0 = -\frac{125}{2} + \frac{125}{2}$,

$0 = \sqrt{x^{\frac{5}{3}} + 15} - \sqrt{x^{\frac{5}{3}} + 15}$, etc. Entonces, como su nombre lo indica, este caso lo aplicamos cuando tenemos la resta de dos cosas que están elevadas al cuadrado:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 + a\,b - a\,b + b^2 \\ &= a\,(a+b) - b\,(a+b) \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de la potencia $x^{2k} = (x^k)^2$ podemos generalizar la diferencia de cuadrados a la diferencia de dos números elevados a la misma potencia par:

$$\boxed{a^{2n} - b^{2n} = (a^n)^2 - (b^n)^2 = (a^n + b^n)(a^n - b^n)} \tag{6}$$

Ejercicio

Resolvé aplicando diferencia de cuadrados:

a) $1 - g^2 =$
b) $b^4 - 36 =$
c) $x^2 - \dfrac{49}{121} =$
d) $25\,m^2 - 4 =$
e) $r^4 - 625 =$

Las **expresiones no polinómicas** son aquellas que no cumplen con la definición de expresiones polinómicas. En la práctica vamos a trabajar con las **expresiones algebraicas racionales** que se definen como cocientes de expresiones polinómicas. En estos casos es importante aclarar que estas expresiones son válidas siempre y cuando no se anule el denominador.

Resolución de problemas

Problema 1: Factoriza la siguiente expresión:

$$3a^2b + (ab)^2 - 4b + ba^2 + 2a^2 + (-b^2) - 4 + 2a^2$$

Lo primero que podemos hacer es reorganizar los términos:

$$(3a^2b + ba^2) + (2a^2 + 2a^2) + (ab)^2 - 4b - b^2 - 4$$

Luego podemos sumar los términos semejantes, es decir lo que está entre paréntesis: $3a^2b + ba^2 = 4a^2b$ y $2a^2 + 2a^2 = 4a^2$. De este modo obtenemos que

$$(3a^2b + ba^2) + (2a^2 + 2a^2) + (ab)^2 - 4b - b^2 - 4 = 4a^2b + 4a^2 + (ab)^2 - 4b - b^2 - 4$$

Ahora podemos volver a reagrupar, los primeros 3 términos tienen como factor común a a^2 y los otros tres, tienen como factor común a -1, entonces

$$4a^2b + 4a^2 + (ab)^2 - 4b - b^2 - 4 = a^2(4b + 4 + b^2) + (-1)(4b + b^2 + 4)$$

Como la suma es conmutativa resulta que $4b + 4 + b^2 = 4b + b^2 + 4$, por lo tanto podemos sacar los paréntesis como factor común

$$a^2(4b + 4 + b^2) + (-1)(4b + b^2 + 4) = (b^2 + 4b + 4)(a^2 - 1)$$

El primer factor resulta ser un trinomio cuadrado perfecto ya que

$$b^2 + 4b + 4 = b^2 + 2\,2b + 2^2 = (b + 2)^2$$

Mientras que el segundo factor es una diferencia de cuadrados

$$a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$$

Finalmente logramos factorizar completamente

$$\begin{aligned}
&3a^2b + (ab)^2 - 4b + ba^2 + 2a^2 + (-b^2) - 4 + 2a^2 = \\
&= 4a^2b + 4a^2 + (ab)^2 - 4b - b^2 - 4 = \\
&= a^2(4b + 4 + b^2) + (-1)(4b + b^2 + 4) = \\
&= (b^2 + 4b + 4)(a^2 - 1) = \\
&= (b + 2)^2(a + 1)(a - 1)
\end{aligned}$$

Problema 2: Factoriza la siguiente expresión y luego simplificá. Considerá que m es distinto de w y $-w$.

$$\frac{m^2 - w^2}{(m - w)^2}\,\frac{(w - m)^2}{w^2 - m^2}$$

En este caso tenemos dos expresiones que ya están factorizadas: $(m - w)^2$ y $(w - m)^2$. Entonces para resolver el ejercicio nos queda factorizar las otras dos expresiones $m^2 - w^2$ y $w^2 - m^2$. Como se puede ver, ambas expresiones son restas de cosas que están elevadas al cuadrado, por lo que vamos a utilizar el caso de diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} m^2 - w^2 &= (m+w)(m-w) \\ w^2 - m^2 &= (w+m)(w-m) \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos estos resultados en la expresión original

$$\frac{m^2 - w^2}{(m-w)^2}\,\frac{(w-m)^2}{w^2-m^2} = \frac{(m+w)(m-w)}{(m-w)^2}\,\frac{(w-m)^2}{(w+m)(w-m)}$$

Si bien hemos logrado factorizar y llevar a la mínima expresión todavía podemos trabajar un poco más para poder simplificar la mayor cantidad de expresiones.

Miremos lo siguiente: las expresiones $(m-w)$ y $(w-m)$ son muy parecidas, pero así cómo están escritas no se pueden simplificar. Sin embargo, como tienen los signos invertidos lo que podemos hacer es sacar factor común -1 en alguna de las dos expresiones, por ejemplo

$$w - m = (-1)(-w+m) = (-1)(m-w)$$

Utilicemos este resultado para analizar los cuadrados de los binomios. Las expresiones $(m-w)^2$ y $(w-m)^2$ ¿son iguales?. Veamos

$$\begin{aligned} (w-m)^2 &= [(-1)(m-w)]^2 \\ &= (-1)^2(m-w)^2 \\ &= 1\,.\,(m-w)^2 \\ &= (m-w)^2 \end{aligned}$$

Sí, efectivamente, $(w-m)^2 = (m-w)^2$. Entonces, reemplazando estos dos últimos resultados en la expresión anterior, obtenemos que

$$\frac{(m+w)(m-w)}{(m-w)^2}\,\frac{(w-m)^2}{(w+m)(w-m)} = \frac{(m+w)(m-w)}{(m-w)^2}\,\frac{(m-w)^2}{(w+m)(-1)(m-w)}$$

Antes de simplificar debemos asegurarnos que los denominadores no se anulen. Por esto debemos considerar que $m - w \neq 0$ y $w + m \neq 0$ y luego sí podemos simplificar.

$$\frac{m^2 - w^2}{(m-w)^2}\,\frac{(w-m)^2}{w^2-m^2} = \frac{\cancel{(m+w)(m-w)}}{\cancel{(m-w)^2}}\,\frac{\cancel{(m-w)^2}}{\cancel{(m+w)}(-1)\cancel{(m-w)}} = -1$$

PRÁCTICA 2

1. Factoriza cada una de estas expresiones:

   a) $6\,a\,b \,+\, 14\,a\,c \,-\, 2\,a\,d \,=$

   b) $36\,a^2\,b^5\,z^2 \,+\, 6\,a^5\,b^2\,z \,+\, 3\,a^2\,b^4\,z^3 \,=$

   c) $a\,b \,-\, a \,-\, b \,+\, 1 \,=$

   d) $2\,x \,+\, 3\,y \,-\, 6\,x\,y \,-\, 9\,y^2 \,=$

   e) $a^4\,m^8 \,-\, b^6\,c^8 \,=$

   f) $z^2 \,-\, 2\,z \,+\, 1 \,=$

   g) $64\,x^3\,y^3 \,+\, 3\,x\,y \,-\, \dfrac{1}{8} \,-\, 24\,x^2y^2 \,=$

   h) $a\,c\,m \,+\, a\,d\,m \,+\, b\,c\,m \,+\, b\,d\,m \,+\, a\,c\,n \,+\, a\,d\,n \,+\, b\,c\,n \,+\, b\,d\,n \,=$

2. Encontrá los errores cometidos, justificando tu respuesta.

   a) $-4\,x^2 \,-\, 4\,x \,-\, 4 \,=\, -4\,(x^2 \,+\, x \,+\, 1) \,=\, -4\,(x \,+\, 1)^2$

   b) $\dfrac{3\,w^2 \,-\, 3\,w \,-\, w^3 \,+\, 1 \,-\, w \,-\, 1}{w^2 \,-\, 1} \,=\, \dfrac{(w \,-\, 1)^{\cancel{3}} \,-\, \cancel{(w \,+\, 1)}}{\cancel{(w \,-\, 1)}\,\cancel{(w \,+\, 1)}}$
   $= (w \,-\, 1)^2$

   c) $\dfrac{m^2 \,-\, w^2}{(m \,-\, w)^2}\,\dfrac{(w \,-\, m)^2}{w^2 \,-\, m^2} \,=\, \dfrac{\cancel{(m \,+\, w)}\,\cancel{(m \,-\, w)}}{(m \,-\, w)\,\cancel{(m \,-\, w)}}\,\dfrac{\cancel{(w \,-\, m)}\,(w \,-\, m)}{\cancel{(w \,+\, m)}\,\cancel{(w \,-\, m)}}$
   $= \dfrac{(w \,-\, m)}{(m \,-\, w)}$

3. Factoriza las siguientes expresiones especificando en cada caso el conjunto de validez y luego simplificá. Elige por lo menos 10 de las siguientes expresiones.

   a) $\dfrac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 + 2\,x} =$

   b) $\dfrac{-r^2 + r^3}{-2\,r^2 + r^3 + r} =$

   c) $\dfrac{t^5 - 16\,t}{-2\,t + t^2} =$

   d) $\dfrac{2}{-3\,n + n^2} \cdot \dfrac{n - 3}{n} =$

   e) $\dfrac{h^2 - 9}{4 + 2\,h} \cdot \dfrac{h + 2}{-4\,h + 3 + h^2} \cdot (1 + h) =$

   f) $\dfrac{4\,k + k^2 + 4}{-4 + k^2} : \dfrac{6\,k^3 + 3\,k^4}{6\,k^2 - 12\,k} =$

   g) $\dfrac{\left(\dfrac{q^2 - 9}{q^4 - 16}\right)}{\left(\dfrac{q^2 + q\,4 + 4}{2 + q}\right)} =$

   h) $\dfrac{6\,x^2}{4\,x - 8} + \dfrac{12\,x}{8 - 4\,x} =$

   i) $\dfrac{2\,y - y^3}{y^2} - \dfrac{y\,(y + 2)}{y^2} =$

   j) $\dfrac{-1 + a}{a^2 - 1} - \dfrac{-a + 5\,a}{1 - a^2} - \dfrac{4\,a^2}{a^2 - 1} =$

   k) $-\dfrac{9 + 6\,u + u^2}{-3 - u} + \dfrac{u^2 - 9}{-3 + u} =$

   l) $\dfrac{2 + l^2}{(l - 2)\,(l^4 - 1)} - \dfrac{3\,l}{-l + 2 + l^5 - 2\,l^4} =$

   m) $\dfrac{3\,z^3}{(2 + z)\,(z - 2)} - \dfrac{24\,z}{z^2 - 4} + \dfrac{48}{-4\,z + z^3} =$

   n) $\dfrac{\dfrac{m}{m - 3} + \dfrac{2}{-6\,m + m^2 + 9}}{-\dfrac{2 - m}{m - 3}} =$

ñ) $\dfrac{\left(\dfrac{h - 7}{h^2 - 16}\right)}{\left(\dfrac{49 - 14h + h^2}{4 + h}\right)} - \dfrac{h + 4}{\left(-\dfrac{16 - h^2}{4}\right)} =$

o) $\left(\dfrac{x}{\frac{1}{x}} : \dfrac{x^2}{\frac{1}{x^2}}\right) + \left(\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right) =$

p) $\dfrac{-(25 - f^2)}{f^2 + 9 - 6f} \, \dfrac{f - 3}{10f + 25 + f^2} - \dfrac{f - 5}{f^2 - 25} =$

q) $\dfrac{x^2 + mx + x^2 + 2mx + m^2}{2x + m} =$

r) $\dfrac{100 - x^2}{20 + \dfrac{x}{2}} \, \dfrac{a - x}{10a - 10x - xa + x^2} =$

s) $\dfrac{abt - tcg + atg - btc}{a^2 - c^2} \, \dfrac{2a + 2c}{2tb^2 + 2tg^2 + 2tgb} =$