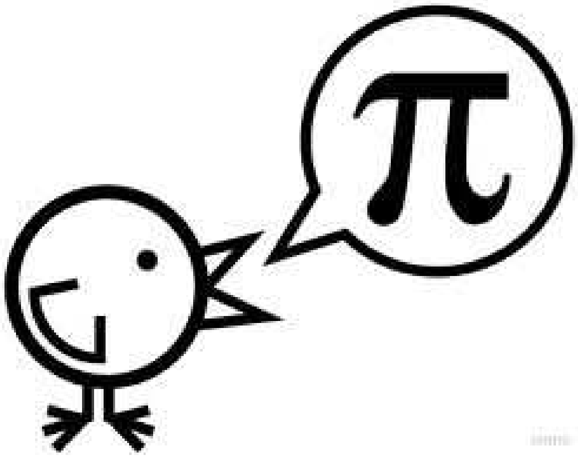
CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

Módulo 1: Números Reales



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

NÚMEROS REALES

Teoría de conjuntos

Se define a un **conjunto** como una colección de elementos. Para describir qué tipo de elementos pertenecen al conjunto existen dos maneras: por extensión y por comprensión. Supongamos que los elementos del conjunto A son el número 2, el número 4 y el número 6, entonces,

Por extensión: Un conjunto se describe **por extensión** cuando se escriben explícitamente todos los elementos que conforman el conjunto entre llaves y separados por comas (o punto y coma). En este caso el conjunto A descrito por extensión sería:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Por comprensión: Un conjunto se describe **por comprensión** cuando se escriben, entre llaves, una relación entre los elementos del conjunto. Por ejemplo:

$$A = \{x / \, x \, \text{es par y} \, 2 \leq x \leq 6\}$$

esto se lee "el conjunto A es igual a todos los x tales que x es un número par y es mayor o igual que 2 y menor o igual que 6 ".

Supongamos ahora que el conjunto B tiene infinitos elementos, y que sus elementos son los números pares mayores o iguales a 2. **Sólo podemos escribir al conjunto B por comprensión** ya que resulta imposible escribir a todos sus elementos.

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

En algunos casos, se puede escribir un conjunto infinito de forma abreviada:

$$B = \{x/\, x\, \text{es par y}\ x \geq 2\}$$

Pero esto sólo es posible cuando la secuencia de números representada por los puntos suspensivos no resulta ambigua.

Ejemplos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{$Argentina, Perú, Bolivia, Chile$\}$
$C = \{x\,/\,x$ es una letra del abecedario$\}$
$D = \{A, B, C\}$ donde A, B y C son los conjuntos anteriores

---

Cuando un conjunto carece de elementos se llama **conjunto vacío** y se simboliza del siguiente modo:

$$C = \{\} = \varnothing$$

Es importante notar que el símbolo $\varnothing$ no se escribe entre llaves. Si escribimos, por ejemplo, $D = \{\varnothing\}$, estamos diciendo que el conjunto D tiene como único elemento al conjunto vacío (por lo tanto $D \neq \varnothing$).

Para expresar que un determinado elemento pertenece (o no pertenece) a un conjunto dado utilizamos la siguiente notación:

$$2 \in A, \ \ \text{se lee}:\ 2\ \text{pertenece al conjunto}\ A$$

$$5 \notin A, \ \ \text{se lee}:\ 5\ \text{no pertenece al conjunto}\ A$$

Análogamente diremos que **un conjunto B está incluido en el conjunto A si y sólo si todos los elementos de B pertenecen a A**, es decir:

$$B \subset A \Longleftrightarrow \forall x \in B,\ x \in A$$

Si B no está incluido en A escribiremos, $B \not\subset A$.

En la última ecuación hemos utilizado el símbolo $\Longleftrightarrow$. Veamos su significado y el del símbolo $\Longrightarrow$ que nos será muy útil.

- $A \Longleftrightarrow B$ significa: A es verdadera si B es verdadera y A es falsa si B es falsa. Se lee: "si y sólo si"; "sii".

- $A \Longrightarrow B$ significa: si A es verdadero entonces B es verdadero también; si B es verdadero entonces nada se dice sobre A. Se lee: "implica"; " entonces"; "por lo tanto".

Ejercicio

Dados el conjunto $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}, a, \{a, c\}\}$ determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) $3 \subset A$

b) $\{3\} \in A$

c) $\{a, c\} \subset A$

d) $\varnothing \subset A$

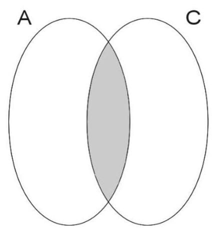
e) $\{3, 4, a\} \in A$

Operaciones entre conjuntos

Intersección: El conjunto "A intersección C " es el conjunto tal que sus elementos pertenecen a A **y** a C, en símbolos es:

$$A \cap C = \{x / \, x \in A \; \text{ y } \; x \in C\} \tag{1}$$

Y su representación con diagramas de Venn es:

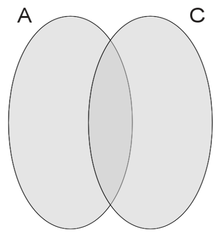


Una manera de simbolizar los conjuntos y las operaciones entre ellos es a través de diagramas de Venn. En esta caso la intersección entre dos conjuntos cualesquiera A y C es la región sobreada de la siguiente figura:

Unión: El conjunto "A unión C " es el conjunto tal que sus elementos pertenecen a A **o** a C, en símbolos es:

$$A \cup C = \{x/\, x \in A \ \text{ó} \ x \in C\} \tag{2}$$

Y su representación con diagramas de Venn es:



Ejercicio

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Hallá los siguentes conjuntos utilizando diagramas de Venn

a) $A \cap C$

b) $C \cup B$

c) $A \cap B \cup C$

e) $(A \cap B) \cup C$

f) $A \cap (B \cup C)$

Conjuntos de Números

Números Naturales, $\mathbb{N}$: Son los números que se utilizan para contar [1]

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

En este curso consideraremos que el número cero no está incluido en el conjunto de números naturales. En el caso de incluirlo usaremos la siguiente notación:

[1]Podés encontrar una curiosidad sobre los números naturales aquí:$http : //www.youtube.com/watch?v = Rwum_6X1Kfc$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Números Enteros, $\mathbb{Z}$: este conjunto está conformado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números Racionales, $\mathbb{Q}$: El conjunto de los números racionales se define a partir del cociente entre dos números enteros, esto es:

$$\mathbb{Q} = \{x/\, x = \frac{p}{q},\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z} \,\text{y}\, q \neq 0\}$$

a $\boldsymbol{p}$ se lo llama **numerador** y a $\boldsymbol{q}$ se lo llama **denominador** de la fracción $\frac{p}{q}$.

Ejemplo: *Los siguientes son números racionales:*

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{262}{1} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{0}{15847} \quad \frac{89654}{1452147}$$

Esta definición incluye a los números enteros ya que si $q = 1$ tendremos que:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p, \quad \text{y}\, p \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Los números fraccionarios, $\mathbb{F}$, son aquellos números racionales que no son enteros.

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$$

Los números racionales se pueden escribir como una fracción o como un número decimal. El número decimal cosrrespondiente a un número racional escrito de la forma ${}^{p}/_{q}$ es igual al resultado de dividir el numerador por el denominador. Por ejemplo, la fracción ${}^{1}/_{2}$ es igual al número decimal 0,5; ${}^{1}/_{4} = 0{,}75$; ${}^{3}/_{2} = 1{,}5$.

Existen casos en que el resultado de la división del numerador por el denominador da un número con infinitos decimales que se repiten con una secuencia determinada. Por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0{,}33333333...$, $\frac{8}{33} = 0{,}252525...$, $\frac{299}{66} = 4{,}53030303030...$. A estos números decimales de los llama periódicos. La notación que suele utilizarse para las cifras que se repiten es la siguiente: 0,33333333... se escribe $0.\hat{3}$, del mismo modo 0,252525... = $0.\hat{25}$ y 4,5303030... = $4{,}5\hat{30}$.

Hay que tener en cuenta que cuando decimos que un número tiene infinitos decimales estamos excluyendo el caso de tener infinitos ceros, ya que todos los números decimales se pueden escribir con infinitos ceros a la derecha. Por ejemplo, 0,5 = 0,500 = 0,5000000000 = $0{,}5\hat{0}$.

Ejercicio

Cuáles de los siguientes números racionales son fraccionarios:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{262}{1} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{0}{15847} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{12}{9} \quad \frac{229}{90}$$

Cómo pasar un número decimal a fracción

La estrategia que utilizaremos para poder hacer el pasaje a fracción va a depender de la cantidad (finita o infinita) de decimales que tenga el número. Vamos a explicarlas con algunos ejemplos.

Ejemplo 1: *Números con finitos decimales*

Para pasar un número con finitos decimales a fracción (una división de números enteros) hacemos lo siguiente: sea n el número decimal, para obtener su equivalente como división de enteros multiplicamos y dividimos a n por la unidad seguida de cero correspondiente a la cantidad de decimales. Es decir que si n tiene un decimal multiplicamos y dividimos por 10, si tiene dos decimales multiplicamos y dividimos por 100, y así siguiendo.

- **Ejemplo 1a:** *Sea* $n = 1{,}56$ *entonces:*

$$1{,}56 = 1{,}56\,\frac{100}{100} = \frac{1{,}56 \times 100}{100} = \frac{156}{100}$$

- **Ejemplo 1b:** *Sea* $n = 12{,}328$

$$12{,}328 = 12{,}328\,\frac{1000}{1000} = \frac{12328}{1000}$$

Ejemplo 2: *Números periódicos*

Pasar un número periódico a fracción es un poco más complicado.

- **Ejemplo 2a:** *Tomemos el número periódico* $n = 1,\hat{3}$ *y multipliquémoslo por 10, esto es* $10\,n = 13,\hat{3}$*, luego, para deshacernos de la parte periódica, hacemos la resta:*

$$10\,n - n = 13,\hat{3} - 1,\hat{3}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $13,\hat{3} = 13 + 0,\hat{3}$ *y* $1,\hat{3} = 1 + 0,\hat{3}$ *resulta que:*

$$10\,n - n = 13,\hat{3} - 1,\hat{3} = 13 + 0,\hat{3} - (1 + 0,\hat{3}) = 13 + \cancel{0,\hat{3}} - 1 \cancel{- 0,\hat{3}} = 12$$

Luego, como $10\,n - n = 9\,n$ *encontramos que:*

$$9\,n = 12$$

Finalmente, despejando n *encontramos su expresión como división de enteros*

$$n = \frac{12}{9}$$

- **Ejemplo 2b:** *Tomamos* $n = 2{,}5\hat{4}$*, entonces siguiendo una idea similar a la anterior hacemos la resta:*

$$100\,n - 10\,n = 254,\hat{4} - 25,\hat{4} = 254 - 25$$

Luego, teniendo en cuenta que $100\,n - 10\,n = 90\,n$ *y despejando* n *de la relación anterior encontramos que:*

$$n = \frac{254 - 25}{90} = \frac{229}{90}$$

Ejercicio

Pasá los siguientes números racionales a fracción:

a) 35,26
b) 0,0034
c) $12.\hat{2}$
d) $3.\hat{9}$
e) $50{,}0\widehat{25}$
f) $0{,}25\hat{7}$

Números Irracionales, $\mathbb{I}$: Son lon números que no pueden expresarse como un cociente de números enteros. Por lo tanto tienen infinitos decimales no periódicos.[2]

Números Reales, $\mathbb{R}$: Es la unión del conjunto de los números racionales y los irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Esquemáticamente, los conjuntos de números pueden representarse del siguiente modo:

$$\mathbb{R}\begin{cases} \mathbb{Q} & \begin{cases} \mathbb{Z} & \begin{cases} \mathbb{N} \\ \{0\} \\ \mathbb{Z}^- \end{cases} \\ \\ \mathbb{F} \end{cases} \\ \\ \mathbb{I} \end{cases}$$

[2] Qué conjunto será más grande, el de los números racionales o el de los irracionales? Puede ser que un conjunto sea más grande que el otro, si ambos tienen infinitos elementos? Aquí podeś encontrar una respuesta (http://www.youtube.com/watch?v=yX97MMWh944).

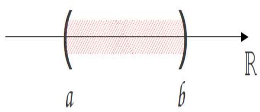
Intervalos

Los intervalos representan conjuntos infinitos de números reales contenidos en un cierto rango. Los intervalos se representan por un par de números que serán los que indiquen los extremos del rango. Para definir los distintos tipos de intervalos vamos a suponer que a y b son dos números reales tales que $a < b$.

- **Intervalo abierto, (a, b):** Es el conjunto de números mayores que a y menores que b (no incluye a sus extremos), y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre paréntesis:

$$\boxed{(a, b) = \{x/\, a < x < b\}} \tag{3}$$

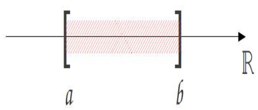
  También puede representarse en la recta numérica, como se muestra a continuación.



- **Intervalo cerrado, $[a, b]$:** Es el conjunto de números mayores o iguales que a y menores o iguales que b (incluye a sus extremos), y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre corchetes:

$$\boxed{[a, b] = \{x/\, a \le x \le b\}} \tag{4}$$

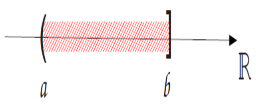
  La representación en la recta numérica es la siguiente:

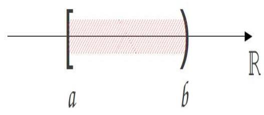


- **Intervalo semiabierto o semicerrado, $(a, b]$ ó $[a, b)$:** Es el conjunto de números que incluye a uno de sus extremos, y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre un paréntesis y un corchete, el paréntesis va en el extremo no incluído en el conjunto y el corchete va en el que se incluye:

$$\boxed{\begin{array}{c} (a, b] = \{x/\, a < x \le b\} \\ [a, b) = \{x/\, a \le x < b\} \end{array}} \tag{5}$$

La representación en la recta numérica es, respectivamente:





Ejercicios

1. Representa en la recta numérica los siguientes conjuntos:

    a) $(-1; 4)$
    b) $(5; \frac{17}{2}]$
    c) $(-2; 6) \cup [4; 9{,}7]$
    d) $(\sqrt{2}; 5] \cap [3{,}2; 7]$

2. Expresa las siguientes desigualdades en notación de intervalos y represéntalos en la recta numérica (El símbolo $\vee$ significa "o", o sea, $A \vee B$, se lee A o B, mientras que el símbolo $\wedge$ significa "y", por lo tanto, $A \wedge B$ se lee: A y B. Luego en Algebra I vas a ver el significado lógico de estas expresiones):

    a) $\{x \,/\, 0 \leq x < \frac{3}{4}\}$
    b) $\{x \,/\, -3{,}1 < x \leq 2\}$
    c) $\{x \,/\, 2 < x < 6 \,\vee\, 3 < x \leq 7\}$
    d) $\{x \,/\, 0 \leq x < 1 \,\wedge\, 1 < x < 2\}$

Operaciones con números reales

A continuación vamos a estudiar las operaciones entre números reales: suma (y resta), valor absoluto, producto (y división), factorial, potenciación, radicación y logaritmo. Para esto vamos a considerar que x, y y z son números reales.

Suma Algebraica

Es una operación que consiste en adicionar dos o más números. Cada uno de los números que se suman se denominan términos. Las propiedades de la suma algebraica son:

1. La suma es cerrada en $\mathbb{R}$:

   El significado de que la suma sea cerrada en el conjunto de los números reales es que la suma de dos números reales da como resultado otro número real. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x+y\ \in \mathbb{R}} \tag{6}$$

2. Propiedad conmutativa:

$$\boxed{x+y=y+x} \tag{7}$$

3. Propiedad asociativa:

$$\boxed{(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z} \tag{8}$$

4. Existencia de elemento neutro:

   Dado cualquier número real x, existe un número real x_0 tal que la suma de ellos es igual a x. Esto se simboliza de la siguiente manera:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, x_0/\, x+x_0=x_0+x=x} \tag{9}$$

   En el caso de la suma el elemento neutro es el cero, $\boldsymbol{x_0=0}$.

5. Existencia del opuesto:

   Dado cualquier número real x, existe un número real $-x$ tal que la suma de ellos es igual al elemento neutro, $x_0=0$. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists -x\ \in \mathbb{R}/\, x+(-x)=(-x)+x=x_0=0} \tag{10}$$

   Se puede demostrar (utilizando la definición del opuesto) que **el opuesto del opuesto es el mismo número: $\boldsymbol{-(-x)=x}$.**

   Es importante notar que $-x$ es el opuesto de x, pero de ningún modo podemos decir que esto significa que el número $-x$ es negativo. Es decir si x es un número positivo, $x>0$, entonces su opuesto será negativo, $-x<0$. Por ejemplo: el opuesto de 2 es -2. Pero si x es menos que cero (negativo), entonces su opuesto será positivo, por ejemplo: el opuesto de -6 es $-(-6)=6$. **El único número que es igual a su opuesto es el cero.**

$$\boxed{x=-x \Longleftrightarrow x=0} \tag{11}$$

Por esta razón la resta se puede pensar como la suma del opuesto: x más el opuesto de y es igual a restarle y a x. Es decir que:

$$\boxed{x + (-y) = x - y} \tag{12}$$

6. Propiedad cancelativa:

   Esta propiedad es una consecuencia de la existencia del opuesto y del elemento neutro.

$$\boxed{x + y = x + z \Longleftrightarrow y = z} \tag{13}$$

   Esta propiedad permite cancelar un mismo término en ambos miembros:

$$x + y = x + z \Longrightarrow y = z$$

   o agregarlo:

$$y = z \Longrightarrow x + y = x + z$$

   La propiedad cancelativa permite hacer pasaje de términos en una igualdad.

$$x + y = z$$

   Por propiedad de la igualdad

$$x + y + (-y) = z + (-y)$$

   Por definición del opuesto

$$x + 0 = z - y$$

   Por definición del elemento neutro

$$x = z - y$$

Módulo o Valor Absoluto

Esta operación se define de la siguiente manera: "El módulo de un número cualquiera es igual a dicho número si éste es positivo o cero, y es igual a su opuesto si es negativo".

El valor absoluto se denota poniendo dos líneas verticales a ambos lados del número. Una forma simbólica de representar lo que acabamos de decir es:

$$|número\,cualquiera| = \begin{cases} número\,cualquiera & \text{si } número\,cualquiera \geq 0 \\ -(número\,cualquiera) & \text{si } número\,cualquiera < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|2| = 2$ y $|-4| = -(-4) = 4$.

Una vez comprendida la idea del valor absoluto daremos su definición formal:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}} \tag{14}$$

Notemos que el módulo de cualquier número es siempre positivo, $|x| \geq 0$. Además tenemos:

$$\boxed{|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0} \tag{15}$$

Este tema lo retomaremos en el Módulo 4, donde estudiaremos funciones.

Producto

El producto entre dos números cualesquiera, representados por x e y, se simboliza con un punto, $x \,.\, y$, o con una cruz, $x \times y$. Generalmente estos símbolos suelen omitirse, por lo que "x multiplicado por y" puede escribirse simplemente como xy.

Las propiedades del producto entre números reales son las siguientes: [3]

1. El producto es cerrado en $\mathbb{R}$:

   El producto de dos números reales da como resultado otro número real. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; xy \;\; \in \mathbb{R}} \tag{16}$$

2. Propiedad conmutativa:

$$\boxed{x\,y = y\,x} \tag{17}$$

   "El orden de los factores no altera el producto".

3. Propiedad asociativa:

$$\boxed{(x\,y)\,z = x\,(y\,z) = x\,y\,z} \tag{18}$$

[3] El producto es una operación que se define de manera intuitiva a partir de la suma de números naturales. Aquí podés encontrar distintas formas de multiplicar números naturales. (http://www.youtube.com/watch?v=vIyBhZSVMGA&feature=fvsr)

4. Existencia del elemento neutro:

   Dado cualquier número real x, existe un número real ${x'}_0$ tal que el producto entre ellos es igual a x. Esto se simboliza de la siguiente manera:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, {x'}_0 /\, x\,{x'}_0 = {x'}_0\, x = x} \tag{19}$$

   En el caso del producto el elemento neutro es el uno, $\boldsymbol{{x'}_0 = 1}$.

5. Existencia del recíproco:

   Dado cualquier número real x distinto de cero, existe un número real x^{-1} tal que el producto entre ellos es igual al elemento neutro, ${x'}_0 = 1$. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{0\},\, \exists\, x^{-1} /\ x\,x^{-1} = x^{-1}\, x = {x'}_0 = 1} \tag{20}$$

   Notemos que **no existe el recíproco del cero**, ya que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero.

   Más adelante veremos que se puede escribir que $x^{-1} = \frac{1}{x}$. De este modo **se puede definir el cociente entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$, como el producto entre $\boldsymbol{x}$ y el recíproco de $\boldsymbol{y}$ (siempre que $\boldsymbol{y \neq 0}$):**

$$\boxed{x\,y^{-1} = x\,\frac{1}{y} = \frac{x}{y}} \tag{21}$$

   Es importante observar que la división por cero no está definida

   De acuerdo a la definición dada para el recíproco de un número real tenemos que:

   - El recíproco del elemento neutro es el elemento neutro:

$$1 = \frac{1}{1} \tag{22}$$

   - El recíproco del recíproco es el mismo número:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{23}$$

   - El producto de los recíprocos es el recíproco del producto:

$$\frac{1}{x}\,\frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \tag{24}$$

6. <u>El producto de cualquier número por cero es cero.</u>

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0} \tag{25}$$

Notemos que si en la propiedad 5 no hubiésemos excluido el cero, tendríamos una contradicción entre las propiedades 5 y 6. Por esta razón es que **"cero sobre cero" está indeterminado, y por esta razón nunca lo escribimos**.

7. <u>Propiedad cancelativa:</u>

Esta propiedad es una consecuencia de la existencia del inverso y del elemento neutro.

$$\boxed{\forall x \neq 0,\ x\,y = x\,z \Longleftrightarrow\ y = z} \tag{26}$$

Por lo tanto, esta propiedad permite agregar o cancelar un factor distinto de cero en ambos miembros:

$$\begin{array}{l} \forall x \neq 0,\ x\,y = x\,z \Longrightarrow\ y = z \\ y = z \Longrightarrow\ x\,y = x\,z,\ \forall x \neq 0 \end{array}$$

Si ese factor fuese cero tendríamos un absurdo:

$$0 \cdot 3 = 0 \cdot 258 \Longleftrightarrow\ 3 = 258$$

La propiedad cancelativa es la que permite el pasaje de factores en una igualdad:

$$x\,y = z$$

Por propiedad de la igualdad

$$x\,y\,\frac{1}{y} = z\,\frac{1}{y}$$

Por definición del recíproco

$$x\,1 = z\,\frac{1}{y}$$

Por definición del elemento neutro

$$x = z\,\frac{1}{y}$$

8. <u>Regla de los signos:</u>

Sean a y b dos números reales y positivos:

$$\boxed{\begin{array}{c} a \cdot b = ab > 0 \\ -a \cdot b = a \cdot (-b) = -ab < 0 \\ -a \cdot (-b) = ab > 0 \end{array}} \tag{27}$$

Coloquialmente uno recuerda esta regla como "*más por más es más; más por menos es menos; menos por más es menos; y menos por menos es más*". **es necesario aclarar que nunca se multiplican los símbolos de la suma o de la resta, se multiplican los números positivos o negativos.**

Debido a la segunda igualdad (y a la existencia del elemento neutro), resulta que el opuesto de cualquier número real se puede escribir como dicho número multiplicado por -1:

$$\boxed{-x = (-1) \cdot x} \tag{28}$$

Como dijimos que la división se puede expresar como un producto, **esta regla también es válida para el cociente de números reales**.

Para poder lograr un mejor entendimiento de esta "regla de signos" hemos introducido, en la lectura adicional "Menos por menos es más ... ¿Seguro? ", un texto de Adrián Paenza[4]. donde se explica esta regla.

9. <u>Distribución con respecto a la suma:</u>

$$\boxed{x\,(y+z) = x\,y + x\,z} \tag{29}$$

El producto es distributivo con respecto a la resta ya que la resta la podemos escribir como la suma del opuesto:[5]

$$\boxed{x\,(y-z) = x\,(y+(-z)) = x\,y + x\,(-z) = x\,y - x\,z} \tag{30}$$

[4]Adrián Arnoldo Paenza (n. Buenos Aires, 9 de mayo de 1949) es licenciado y doctor en ciencias matemáticas por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA). Una de sus actividades consiste en la divulgación de la matemática. Entre otras cosas se pueden encontrar los libros de la colección "Matemática . . . ¿estás ahí?". Buscalos en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza.

[5]Otra manera de pensar el producto y la aplicación de esta propiedad la pueden encontrar Aquí(http://www.youtube.com/watch?v=5JtliQVoOZo&feature=related).

Suma y producto de fracciones

Aquí vamos a ver en detalle cómo se aplican las propiedades de la suma y del producto a la operación con números racionales. Sean a, b, c y d números enteros y los consideraremos no nulos cuando sean denominadores.

1. Suma de fracciones:

   Cuando las fracciones tienen el mismo denominador tendremos que (en este caso $b \neq 0$):

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \tag{31}$$

   La forma de operar para llegar al resultado anterior es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a\,\frac{1}{b} + c\,\frac{1}{b} = (a+c)\,\frac{1}{b} = \frac{a+c}{b}$$

   En el caso en que las fracciones no tengan el mismo denominador hay que llevar las fracciones a fracciones equivalentes[6] para obtener igual denominador. Esto es lo que conocemos como "sacar denominador común".

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}} \tag{32}$$

   donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$. La forma de operar en este caso es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,1 + \frac{c}{d}\,1 = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\,\frac{b}{b} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

   En general conviene elegir como denominador común el mínimo común múltiplo[7] de los denominadores.

[6]Dos fracciones son equivalentes cuando representan al mismo número. Por ejemplo $0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1000}{2000}$.

[7]El mínimo común múltiplo de dos números es el menor número que sea simultáneamente múltiplo de ambos.

Ejemplo: *Supongamos que cortamos una pizza en 8 porciones iguales. La pizza completa la podemos representar numéricamente como*

$$1 = \frac{8}{8}$$

Es decir, que de las ocho porciones, tenemos 8. Supongamos ahora que nos comemos 3 porciones y después de un buen rato nos comemos otras 2 porciones. En total nos comimos 5 porciones, si hacemos la cuenta tendremos

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

Ahora supongamos que nos comemos además la mitad de una de las porciones. Esta media porción equivale a cortar la pizza en 16 porciones iguales y comernos una de estas porciones, entonces en total nos hemos comido

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}\frac{2}{2} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10+1}{16} = \frac{11}{16}$$

Por lo tanto nos comimos "once dieciseisavos de pizza".

---

2. <u>Opuesto de una fracción:</u>

   El opuesto de una fracción puede escribirse de distintas maneras siguiendo la regla de los signos. Sea $b \neq 0$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\left(a\,\frac{1}{b}\right) \\ &= (-a)\frac{1}{b} = a\left(-\frac{1}{b}\right) \\ &= a\frac{-1}{b} = a\frac{1}{-b} = (-1)\frac{a}{b} \end{aligned} \tag{33}$$

3. <u>Producto de fracciones:</u>

   Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\boxed{\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}} \tag{34}$$

donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$. En este caso las operaciones que hicimos para obtener el resultado anterior son

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \left(a\,\frac{1}{b}\right)\left(c\,\frac{1}{d}\right) = (a\,c)\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{d}\right) = (a\,c)\left(\frac{1}{b\,d}\right) = \frac{a\,c}{b\,d}$$

4. Racíproco de una fracción:

$$\boxed{\frac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}} \tag{35}$$

con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{1}{a\,\frac{1}{b}} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{a}\,b = \frac{b}{a}$$

5. División de fracciones:

Es lo que se conoce como “extremos con extremos y medios con medios”.

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\,d}{b\,c}} \tag{36}$$

Los extremos serían a y d, mientras que los medios serían b y c ($b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$).

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\,\frac{1}{b}}{c\,\frac{1}{d}} = a\,\frac{1}{b}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{d}\right)} = a\,\frac{1}{b\,c}\,d = \frac{a\,d}{b\,c}$$

6. Simplificación de fracciones:

La simplificación es una división “encubierta ”. La operación consiste en descomponer el numerador y el denominador en factores y efectuar aquellas aquellas divisiones que tienen igual numerador y denominador.

Ejemplo: *Tomemos la fracción* $\frac{10}{6}$

$$\frac{10}{6} = \frac{2\,.\,5}{3\,.\,2} = \frac{2}{2}\,\frac{5}{3} = 1\,\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

De este modo, al simplificar, obtenemos una fracción equivalente, esto significa que: 10 dividido 6, es igual 5 dividido 3.

Lo que generalmente se hace para abreviar el cálculo es tachar el numerador y el denominador y poner arriba de cada uno el resultado de la división por el factor común. En este ejemplo el factor común es 2, entonces dividimos al numerador y al denominador por 2.

$$\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{6}^{\,3}} = \frac{5}{3}$$

Es importante ver que sólo se pueden simplificar los factores del numerador con los del denominador. No se pueden simplificar términos y tampoco se pueden simplificar factores nulos.

Ejercicio

Encuentra, si existen, los errores en los siguientes cálculos

a) $\frac{10}{6} = \frac{2+2+\cancel{2}+2+2}{\cancel{2}\,.\,3} = \frac{8}{3}$

b) $\frac{18}{10+2} = \frac{\cancel{2}\,.\,9}{\cancel{2}\,.\,5+2} = \frac{9}{5+2} = \frac{9}{7}$

c) $\frac{3\,.\,4}{12} = \frac{\cancel{3}\,.\,\cancel{4}}{\cancel{3}\,.\,\cancel{4}} = 0$

d) $\frac{15}{25} = \frac{\cancel{15}^{\,0}}{\cancel{25}^{\,10}} = \frac{0}{10}$

e) $\frac{15}{25} = \frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{25}^{\,5}} = \frac{3}{5}$

f) $\frac{a\,(a+b)}{b\,(a+b)} = \frac{a\,(\cancel{a}+\cancel{b})}{b\,(\cancel{a}+\cancel{b})} = \frac{a}{b}$

g) $\dfrac{a\,(a+b)}{b\,(a+b)} = \dfrac{a\,\cancel{(a+b)}}{b\,\cancel{(a+b)}} = \dfrac{a}{b}$

h) $\dfrac{a\,(a-b)}{b\,(b-a)} = \dfrac{a\,\cancel{(a-b)}}{b\,\cancel{(b-a)}} = \dfrac{a}{b}$

Factorial:

Es una operación definida para los números naturales. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces el factorial de n se define como

$$n! = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\,\ldots\,3\,.\,2\,.\,1 \tag{37}$$

de aquí se puede ver que:

$$n! = n\,(n-1)! \tag{38}$$

Para que esta expresión sea válida también para $n = 1$ se define que:

$$0! = 1 \tag{39}$$

Ejercicio

Calcula aplicando propiedades, sin utilizar calculadora:

a) $\left(-\dfrac{3}{5}\right) . \left(2 - \dfrac{5}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{5}{12}\right) \div \left(-\dfrac{1}{6}\right) =$

b) $\left[0{,}6 \div (-0{,}3) + 0{,}3 - \dfrac{13}{10}\right] \div 0{,}5\,.\,\dfrac{15}{30} =$

c) $(1 - 0,\hat{6})\,.\,0,\hat{3} - (1 - 0,\hat{5}) =$

d) $\left(|-5| + \dfrac{4}{10}\right) \div (-|-2{,}5|) =$

e) $\dfrac{100!}{99!} - \dfrac{99}{0!} - \dfrac{14+2}{2\,.\,8} =$

Potenciación

Esta operación se define de la siguiente manera. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}(n \neq 0)$, x a la potencia n (o x elevada a la n), x^n, se define como:

$$\boxed{x^n = \underbrace{x.x \ldots x}_{n \text{ veces}}} \tag{40}$$

y se dice que ***x* es la base** de la potencia, y ***n* es el exponente**. De esta definición surge que:

- Cero elevado a cualquier potencia es igual a cero.

$$0^n = 0 \tag{41}$$

- Uno elevado a cualquier potencia es igual a uno.

$$1^n = 1 \tag{42}$$

Propiedades:

Siempre consideraremos bases reales y exponentes naturales.

1. <u>La potencia es distributiva con respecto al producto y al cociente</u>

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (x\,y)^n & = & x^n\,y^n \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^n & = & \dfrac{x^n}{y^n} \end{array}} \tag{43}$$

Las demostraciones son las siguientes

$$(x\,y)^n = \underbrace{(x\,y)(x\,y)\ldots(x\,y)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(x\,x\ldots x)}_{n \text{ veces}}\underbrace{(y\,y\ldots y)}_{n \text{ veces}} = x^n\,y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\ldots\left(\frac{x}{y}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{x\,x\ldots x}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{y\,y\ldots y}_{n \text{ veces}}} = \frac{x^n}{y^n}$$

De este modo demostramos que la potencia es distributiva respecto al producto y a la división. De aquí que:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1^n}{x^n} = \frac{1}{x^n}$$

Tener muy en cuenta que:

- **NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA**

$$(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$$

- **NO ES CONMUTATIVA**

$$x^n \neq n^x$$

2. Producto de potencias de igual base.

$$\boxed{x^n x^m = x^{n+m}} \tag{44}$$

Demostración:

$$x^n\, x^m = \underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}}\;\underbrace{x\,x\ldots x}_{m \text{ veces}} = \underbrace{x\,x\ldots x}_{n+m \text{ veces}} = x^{n+m}$$

Así hemos demostrado que el producto de potencias de igual base es igual a dicha base elevada a la suma de las potencias.

3. Cociente de potencias de igual base, distintas de cero.
resta de los exponentes.

$$\boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}} \tag{45}$$

Para demostrar esta propiedad vamos a separar en tres casos posibles.

- Si $n \neq m$

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{\overbrace{x\,x\ldots x}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{x\,x\ldots x}_{m \text{ veces}}}$$

pero podemos escribir que $n = m + (n-m)$ resultando que $x^n = x^{m+(n-m)} = x^m\, x^{n-m}$ (por la propiedad anterior). Entonces, reemplazando esto en la expresión obtenemos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{x^m\, x^{n-m}}{x^m} = \left(\frac{x^m}{x^m}\right) x^{n-m} = x^{n-m}$$

$$\therefore \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$$

- Si $n = m$ obtenemos, utilizando el resultado anterior, que

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$\therefore \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n = m$$

  Pero por otro lado sabemos que:

$$\frac{x^n}{x^n} = 1$$

  Por lo tanto, encontramos que **todo número real, distinto de cero, elevado a la potencia nula es igual a 1.**

$$\boxed{x^0 = 1} \tag{46}$$

Notemos que como $x^0 = 1$ y $0^n = 0$, **no podemos definir** 0^0**.**

De este modo hemos demostrado que el cociente de potencias de igual base es igual a dicha base elevada a la diferencia de los exponentes.

4. <u>Exponentes negativos</u>

Cualquier número real distinto de cero elevado a una potencia negativa es igual a su recíproco elevado a la potencia opuesta.

$$\boxed{x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}} \tag{47}$$

La demostración de esta propiedad es la siguiente. Consideremos el cociente entre x^n y x^m donde n y m son dos naturales cualesquiera tales que $m > n$. Teniendo en cuenta que podemos escribir que $m = n + (m - n)$ encontramos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{x^n}{x^n\, x^{m-n}} = \left(\frac{x^n}{x^n}\right) \frac{1}{x^{m-n}} = \frac{1}{x^{m-n}}$$

Pero, utilizando la propiedad anterior, tenemos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = x^{-(m-n)}$$

Luego, juntando estos dos resultados obtenemos que

$$\frac{1}{x^{m-n}} = x^{-(m-n)}$$

Ahora, $(m - n) \in \mathbb{N}$ (porque $m > n$), luego podemos llamar $t = m - n$ obtenemos que:

$$x^{-t} = \frac{1}{x^t}$$

De este modo se extiende la potenciación a exponentes enteros.

Utilizando este resultado se tiene que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{1}{(x/y)^n} = \frac{1}{\left(\frac{x^n}{y^n}\right)} = \frac{y^n}{x^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

5. <u>Potencia de una potencia</u>

$$\boxed{(x^n)^m = x^{n\,m}} \tag{48}$$

Esta propiedad se demuestra utilizando la definición de potencia:

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n\,x^n\ldots x^n}_{m \text{ veces}} = \underbrace{(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})\ldots(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})}_{m \text{ veces}} = x^{n\,m}$$

De este modo demostramos que la potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de las potencias. Como el producto es commutativo resulta que los exponentes son conmutables, es decir, que:

$$(x^n)^m = x^{n\,m} = x^{m\,n} = (x^m)^n \tag{49}$$

Notemos que:

$$\begin{array}{rcl} (x^n)^m & \neq & x^{(n^m)} \\ x^{(n^m)} & = & x^{n^m} \end{array}$$

Con esta propiedad se puede ver que **un número negativo elevado a cualquier potencia par es siempre positivo.** Para demostrarlo tomemos un número real positivo cualquiera $x > 0$, así $(-x < 0)$, y un número entero par n. Para que un número sea par debe ser múltiplo de dos, esto es, $n = 2k$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned}(-x)^n &= (-x)^{2k}\\ &= [(-x)^2]^k\\ &= [(-x)(-x)]^k\\ &= (x^2)^k\\ &= x^{2k}\\ &= x^n\end{aligned}$$

Y como dijimos que $x > 0$, resulta que $x^n > 0$.

Ejercicios

1. Escribe V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda y justifica tu respuesta.

   a) $a^3 \,.\, a^2 = a^6$

   b) $m \,.\, m \,.\, m = 3m$

   c) $(b \,.\, b^2)^3 = b^9$

2. Resuelve aplicando propiedades de la potenciación

   a) $\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{16} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{18} - 1^5 =$

   b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{7} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \left[\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2}\right] \div \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

   c) $(a \,.\, a^2)^2 : a^5 =$

   d) $(b \,.\, b^{-2})^3 \,.\, b^2 =$

   e) $\left(\frac{m}{n^3}\right)^5 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-3} =$

Notación científica:

Este tipo de notación se basa en potencias (positivas y negativas) de 10, es decir:

$$\begin{array}{rcl} & \cdots & \\ 10^{-3} & = & 0{,}001 \\ 10^{-2} & = & 0{,}01 \\ 10^{-1} & = & 0{,}1 \\ 10^{1} & = & 10 \\ 10^{2} & = & 100 \\ 10^{3} & = & 1000 \\ & \cdots & \end{array}$$

De este modo cualquier número real se puede escribir como un número decimal o entero multiplicado por una potencia de 10. En particular esta notación es una manera práctica de escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo:

$$0{,}0000000425 = \frac{4{,}25}{10^8} = 4{,}25 \,\mathrm{x}\, 10^{-8}$$

$$5890000000000000 = 5{,}89 \,\mathrm{x}\, 10^{15}$$

Como estos números son reales siguen valiendo todas las propiedades de todas las operaciones.

Ejemplo:

$$4{,}25 \,\mathrm{x}\, 10^{-8} + 5{,}78 \,\mathrm{x}\, 10^{-8} = (4{,}25 + 5{,}78\,)\mathrm{x}\, 10^{-8} = 10{,}03 \,\mathrm{x}\, 10^{-8}$$

$$(1{,}25 \,\mathrm{x}\, 10^{6})(7 \,\mathrm{x}\, 10^{-8}) = (1{,}25 \,\mathrm{x}\, 7)(10^{6} \,\mathrm{x}\, 10^{-8}) = 8{,}75 \,\mathrm{x}\, 10^{6-8} = 8{,}75 \,\mathrm{x}\, 10^{-2}$$

$$(6{,}91 \,\mathrm{x}\, 10^{15})^2 = (6{,}91)^2 \,\mathrm{x}\, (10^{15})^2 = 13{,}82 \,\mathrm{x}\, 10^{15\mathrm{x}2} = 13{,}82 \,\mathrm{x}\, 10^{30}$$

Ejercicio

Calcula sin utilizar calculadora:

a) $9{,}5 \times 10^{-12} \; + \; (-5{,}28 \times 10^{-11}) \; =$

b) $(-9{,}8 \times 10^{15}) \; : \; (-1{,}4 \times 10^{-9}) \; =$

c) $10^{26} \,.\, \left(\dfrac{5{,}1}{10^{23}}\right) \,.\, (-2{,}5) \; =$

Radicación

Sean $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la raíz de índice n de x como

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = y \Longrightarrow y^n = x} \tag{50}$$

y se dice que **x es el radicando e y es la raíz.** Si $n = 2$ decimos que $\sqrt[2]{x}$ es la raíz cuadrada de x y se escribe $\sqrt{x}$.

ATENCIÓN

Es muy común leer la definición que dimos en sentido opuesto, es decir, uno podría pensar que si $y^n = x$ entonces $\sqrt[n]{x} = y$. Luego uno podría decir que como $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$ entonces $\sqrt{4} = \pm 2$. Pero esto trae muchas ambigüedades a la hora de operar. Esta ambigüedad viene de una mala interpretación de la definición que dimos, $\sqrt[n]{x} = y \Longrightarrow y^n = x$, esto significa que si $\sqrt[n]{x} = y$ entonces, obligadamente $y^n = x$, pero como la definición tiene una flecha en un sólo sentido **no es correcto decir que** si $y^n = x$ entonces $\sqrt[n]{x} = y$. Por esta razón, vale la igualdad:

$$\sqrt{4} = 2$$

mientras que:

$$\sqrt{4} \neq -2$$

Se toma como convención que **el resultado de toda raíz de índice par de un número real positivo es único**. (Como veremos más adelante esta convención tiene sentido ya que de este modo conseguimos que la raíz sea una función.) En símbolos sería:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}: \qquad \sqrt[2n]{x} \geq 0} \tag{51}$$

De la definición de raíz, también podemos ver que, **en reales, no existe la raíz de índice par de un número negativo**, ya que cualquier número elevado a una potencia par da **siempre** positivo.

$$\boxed{x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \,\text{y}\, x < 0: \quad \nexists \sqrt[2n]{x}} \tag{52}$$

Finalmente, la última combinación que nos queda es la raíz de índice impar, que por las propiedades de la potenciación podemos deducir que **la raíz de índice impar tiene un único resultado: es positivo si el radicando es positivo, y negativo si el radicando es negativo**.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \,\text{impar y}\, x < 0: & \sqrt[n]{x} < 0 \\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \,\text{impar y}\, x \geq 0: & \sqrt[n]{x} \geq 0 \end{array}} \tag{53}$$

Ejemplo: *De acuerdo a la definición y a la convención tomada para la radicación tendremos lo siguiente. Para el caso de raíces de índice par:*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4} & = & 2 \\ -\sqrt{4} & = & -2 \\ \sqrt{-4} & & \text{no existe en } \mathbb{R} \end{array}$$

Las raíces de índice impar siempre están definidas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{8} = 2 & \text{ya que} & 2^3 = 8 \\ \sqrt[3]{-8} = -2 & \text{ya que} & (-2)^3 = -8 \end{array}$$

Veamos ahora si es posible expresar la raíz de un número como una potencia de dicho número. Es decir, lo que queremos ver es si existe algún número t tal que:

$$\sqrt[n]{x} = x^t \quad \text{con}\, n \in \mathbb{N}$$

Para ver si esto es cierto llamemos y a la raíz enésima de x, es decir:

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Luego, por la definición de raíz, resulta que:

$$y^n = x$$

Pero, por otro lado, si $y = \sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{x} = x^t$, resulta que:

$$y = x^t$$

Ahora elevemos a la potencia n en ambos miembros,

$$y^n = (x^t)^n = x^{nt}$$

y como dijimos que $y^n = x$ de la expresión anterior obtenemos que:

$$x = x^{nt}$$

Si $x = 0$ se satisface la igualdad cualesquiera sean n y t. Es decir que si $x = 0$ podemos escribir la raíz de cero como una potencia de cero. Ahora veamos qué pasa si $x \neq 0$. En este caso, podemos dividir por x en ambos miembros y obtener que:

$$1 = \frac{x^{nt}}{x} = x^{nt-1}$$

Si $x = 1$ se satisface la igualdad cualesquiera sean n y t. Pero si $x \neq 1$ la única posibilidad que queda es que se anule el exponente, ya que cualquier número real distinto de cero elevado a una potencia nula da 1. Por lo tanto:

$$nt - 1 = 0$$

Como lo que nosotros estamos buscando es un número t tal que $\sqrt[n]{x} = x^t$, despejamos t de la relación anterior.

$$t = \frac{1}{n}$$

De este modo encontramos que **la raíz de cualquier número real se puede escribir como una potencia**:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}} \tag{54}$$

Luego podemos generalizar este resultado, utilizando las propiedades de la potencia, del siguiente modo:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{p\,\frac{1}{n}} = x^{\frac{p}{n}}} \tag{55}$$

Así, **la utilización de la raíz extiende la potenciación a números fraccionarios.** Por esto, en general, las propiedades de la potenciación se pueden extender a la radicación. Pero hay que tener cuidado con algunos detalles.

Propiedades:

Vamos a considerar que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además vamos a suponer que los radicandos son tales que siempre sus raíces están definidas en los reales.

1. <u>La raíz es asociativa y distributiva con respecto al producto y al cociente</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{x}{y}\right)} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \end{array}} \tag{56}$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{x\,y} = (x\,y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Obviamente que la segunda igualdad vale siempre que $y \neq 0$.

ATENCIÓN

Para utilizar esta propiedad **hay que tener mucho cuidado en el caso de tener índice par** ya que, por ejemplo:

$$\sqrt{(-9)(-16)} = \sqrt{144} = 12$$
$$\sqrt{(-9)(-16)} \neq \sqrt{-9}\sqrt{-16} \text{ porque } \nexists \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$$

La propiedad distributiva vale siempre y cuando las raíces queden definidas.

Tener muy en cuenta que:

- **NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA**

$$\sqrt[n]{x \pm y} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$$

- **NO ES CONMUTATIVA**

$$\sqrt[n]{x} \neq \sqrt[x]{n}$$

2. Se puede intercambiar el orden de las operaciones

$$\boxed{\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p} \tag{57}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{p\,\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}\,p} = (x^{\frac{1}{n}})^p = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$$

ATENCIÓN

Esta propiedad no vale en el caso de índice par y radicando negativo. Veamos esto con un ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \left(\sqrt{-4}\right)^2 \nexists \end{array}\right\} \sqrt{(-4)^2} \neq \left(\sqrt{-4}\right)^2$$

Por esta misma razón hay que tener cuidado al simplificar exponentes fraccionarios:

$$(-8)^{\frac{3}{9}} = (-8)^{\cancel{\frac{3}{9}}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-8)^{\frac{2}{4}} = (-8)^{\cancel{\frac{2}{4}}} = (-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8} \nexists$$

Dentro del conjunto de los reales, este ejercicio tiene solución si se realiza primero la potencia y luego la raíz. Luego verán en Algebra I, cuando trabajen con números complejos, que podrán resolverlo de ambas formas.

Es importante notar que cuando uno tiene un exponente fraccionario, se pueden aplicar todas las propiedades que valen para la potenciación **siempre y cuando la raíz quede definida.**

Caso particular: Índice y exponente iguales

En este caso vamos a estudiar qué pasa cuando el índice es igual al exponente. Para hacer este análisis vamos a separar en dos casos: en el primero tendremos índice y exponente impar, y en el segundo tendremos índice y exponente par.

- Primero analicemos el caso cuando el exponente está dentro de la raíz.
  a) Índice y exponente impar.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} \geq 0 \\ \text{Si}\, x < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} < 0 \end{aligned}$$

  Por lo tanto resulta que:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{si}\, n\, \text{es impar.}} \tag{58}$$

  b) Índice y exponente par.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} \geq 0 \\ \text{Si}\, x < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = (\underbrace{x^n}_{>0})^{\frac{1}{n}} = -x \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} > 0 \end{aligned}$$

  Por lo tanto, encontramos que:

$$\text{Si}\, n\, \text{es par} \Longrightarrow \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{si}\, x \geq 0 \\ -x & \text{si}\, x < 0 \end{cases}$$

  Entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \text{si}\, n\, \text{es par}} \tag{59}$$

- Ahora veamos qué pasa cuando el exponente está fuera de la raíz.

  a) Índice y exponente impar.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \end{aligned}$$

  Por lo tanto:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x \;\; \text{si}\, n\, \text{es impar.}} \tag{60}$$

  b) Índice y exponente par.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \nexists \end{aligned}$$

  Por lo tanto, si n es par, tendremos que:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n \neq \sqrt[n]{x^n} \;\; \text{y} \;\; \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \neq |x|$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \nexists \end{aligned}} \tag{61}$$

La importancia de analizar el caso particular de índice y exponente iguales radica en la resolución de ecuaciones (ver lectura adicional “Resolución de ecuaciones ”).

3. Raíz de raíz

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}} \tag{62}$$

Demostración:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{x}$$

Ejercicios

1. Escribe V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda y justifica tu respuesta.

   a) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

   b) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt{x^2} = x$

2. Resuelve aplicando propiedades de la radicación especificando para que valores resultan válidas las expresiones finales:

a) $\sqrt{a^3}\,\sqrt{a}\,\sqrt{a^4} =$

b) $\sqrt[9]{\dfrac{x^{12}}{y^{15}}} =$

c) $\sqrt[3]{8\,x} + \sqrt[6]{x^4} - 5\,\sqrt[3]{x} =$

d) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3} =$

e) $\dfrac{b + c}{\sqrt{\sqrt{b} - \sqrt{c}}} =$

Hasta aquí hemos visto las operaciones básicas entre números reales y sus propiedades. Descubrimos que la resta es la suma del opuesto de un número y que la división es el producto del recíproco. Luego vimos que a partir del producto se puede definir la potenciación con exponentes naturales, con el cociente extendimos las potencias a los enteros y, finalmente, con la radicación, extendimos la potencia a los números fraccionarios.

La última operación que veremos también está basada en la potenciación y se llama **logaritmo**.

Logaritmo

El logaritmo es una operación que se define, como mencionamos anteriormente, a partir de la potenciación de la siguiente manera: se dice que el logaritmo en base a de b es igual a c si y sólo si a elevado a la potencia c es igual a b. En símbolos es:

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

Se llama base del logaritmo al número a y se llama argumento al número b.

Ejemplo: *Supongamos que queremos calcular el logaritmo en base 2 de 8. Esto es:*

$$\log_2 8 =$$

De acuerdo a la definición dada, para resolver el cálculo debemos encontrar un número tal que 2 elevado a dicho número sea igual a 8. El número buscado es el 3 ya que $2^3 = 8$. Por lo tanto encontramos que:

$$\log_2 8 = 3$$

Para que el resultado del logaritmo sea un número real hay que restringir los valores del argumento y de la base.

Vamos a definir que **la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de cero**, por lo tanto $a > 0$ (o $a \in \mathbb{R}^+$).

- a debe ser positiva para evitar los casos en los cuales a^c no esté definido.
- a debe ser distinta de cero porque $0^c = 0$ y 0^0 no está definido.

Además, si $a > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, tendremos que $a^c = b > 0$, luego **el argumento del logaritmo debe ser positivo**, esto es $b \in \mathbb{R}^+$.

Finalmente, la última restricción es que **la base debe ser distinta de 1**, dado que $1^c = 1$, por lo que $\log_1 1$ sería igual a cualquier número real, así $a \neq 1$ para que el logaritmo quede definido.

Por lo tanto la definición completa de logaritmo es:

$$\boxed{\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \neq 1,\ \log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b} \tag{63}$$

En general, los logaritmos que más se usan son los llamados:

Logaritmo decimal: es cuando se toma el logaritmo en base 10, y se escribe como $\log x$. Es decir que:

$$\log x \equiv \log_{10} x$$

Logaritmo natural o neperiano: es cuando se toma el logaritmo en base e (el número neperiano es un número irracional, $e = 2{,}718281828\ldots$)[8], y se escribe como $\ln x$. Es decir que:

$$\ln x \equiv \log_e x$$

Ejercicios

1. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

   a) $\log_4 64 \; =$

   b) $\log_3 \dfrac{1}{3} \; =$

[8] Nuevamente recurrimos a un video de Paenza para conocer un poco más al número neperiano. (http://www.youtube.com/watch?v=MKgjf-1XcNM&feature=related)

c) $\ln 1 \;=$

d) $\log 0{,}001 \;=$

e) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{27}{8} \;=$

2. Utilizando la definición de logaritmo, despeja y halla con calculadora el valor de x.

a) $\log x \;=\; \dfrac{1}{2}$

b) $\log_2 x \;=\; 7{,}1$

c) $\log_x 8 \;=\; 3$

Propiedades

Vamos a considerar que la base y el argumento son positivos y que la base es distinta de 1.

1. El logaritmo de uno en cualquier base es igual a cero.

$$\boxed{\forall x,\ \log_x 1 = 0 \ \text{ ya que } x^0 = 1} \tag{64}$$

2. Si la base y el argumento del logaritmo son iguales, entonces el logaritmo de ese número, en esa base, es igual a uno.

$$\boxed{\forall x,\ \log_x x = 1 \ \text{ ya que } x^1 = x} \tag{65}$$

3. Logaritmo de un producto.

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y} \tag{66}$$

Demostración:

Sean p y q tales que $\log_a x = p$ y $\log_a y = q$. Por lo tanto:

$$p + q = \log_a x + \log_a y \tag{67}$$

Por otro lado, de la definición de logaritmo tenemos que $a^p = x$ y $a^q = y$. Luego, el producto de x por y será igual a:

$$x\,y = a^p\,a^q = a^{p+q} \tag{68}$$

Utilizando otra vez la definición de logaritmo tenemos que:

$$x\,y = a^{p+q} \Longrightarrow \log_a(x\,y) = p + q \tag{69}$$

Así, de las ec. 67 y 69 encontramos que:

$$\log_a(xy) = p + q = \log_a x + \log_a y \tag{70}$$

Por lo tanto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{71}$$

4. Si el argumento del logaritmo es una potencia, entonces el logaritmo es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\boxed{\log_a(x^b) = b\,\log_a x} \tag{72}$$

Esto se demuestra de la siguiente manera. Llamemos $c = \log_a(x^b)$ y $c' = \log_a x$. Luego, por la definición de logaritmo, podemos escribir que $a^c = x^b$ y que $a^{c'} = x$. Por lo tanto

$$a^c = x^b = \left(a^{c'}\right)^b = a^{c'\,b}$$

De aquí resulta que:

$$a^c = a^{c'\,b} \Longrightarrow c = c'\,b$$

Finalmente obtenemos que:

$$\log_a(x^b) = c = c'\,b = b\,\log_a x$$

Utilizando este resultado y la propiedad 2 se puede demostrar fácilmente que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x} \tag{73}$$

ATENCIÓN

Hay que tener ciertos cuidados con la notación:

$$\log_a(x^b) = \log_a x^b = b \log_a x$$

$$\log_a^b x = (\log_a x)^b$$

Por ejemplo:

$$\log_2(2^3) = 3 \ \log_2 2 = 3$$
$$\log_2^3 2 = (\log_2 2)^3 = 1^3 = 1$$

Por lo tanto:

$$\log_a^b x \neq \log_a x^b$$

5. Logaritmo de un cociente.

$$\boxed{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y} \tag{74}$$

Esta propiedad se demuestra utilizando las propiedades de la potenciación y las propiedades 3 y 4 de los logaritmos.

6. Cambio de base

Cualquier logaritmo en una base dada, puede cambiarse a cualquier otra base que uno elija. Este "cambio de base" se realiza del siguiente modo. Por definición de logaritmo tenemos que:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

Supongamos que queremos cambiar la base a por otra base b. Para esto, a la relación $a^y = x$ le aplicamos logaritmo en base b en ambos miembros, esto es:

$$\begin{aligned} a^y &= x \\ \log_b(a^y) &= \log_b x \\ y \log_b a &= \log_b x \end{aligned}$$

Despejando y encontramos que:

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pero al comienzo dijimos que $\log_a x = y$ por lo tanto,

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \tag{75}$$

Así podemos calcular el logaritmo en una base dada a utilizando una base cualquiera b.

Ejercicios

1. Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas justificando tu respuesta:

   a) $(\log_3 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 4$

   b) $\log_3 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 4$

   c) $\frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \log_3 2 - \log_3 5$

   d) $\log_3 \frac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5$

   e) $\ln 2 = \frac{\log 2}{\log e}$

2. Sabiendo que $\log a = 2$, $\log b = 3$ y que $\log c = 4$, calcula los siguientes logaritmos:

   a) $\log(a^2 \,.\, b) =$

   b) $\log \sqrt{\frac{b}{c^3}} =$

   c) $\log \left(\frac{b^3}{\sqrt{a}} \,.\, c \right) =$

Antilogaritmo

Se define como la operación inversa del logaritmo. Si tenemos $\log_a x$, el antilogaritmo es la operación a^x (en el capítulo de funciones es lo que llamaremos función exponencial).

El logaritmo y el antilogaritmo son operaciones inversas porque se cumple que:

$$\log_a(a^x) = x$$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \tag{76}$$

Demostración:

La primera igualdad es una consecuencia de la cuarta propiedad del logaritmo (ecuación 73). Para demostrar la segunda igualdad vamos a considerar que $b = \log_a x$, luego:

$$a^{\log_a x} = a^b$$

Pero por la definición de logaritmo tenemos que $a^b = x$. Entonces,

$$a^{\log_a x} = a^b = x$$

Resolución de problemas

En esta sección veremos cómo utilizar las propiedades de las operaciones para resolver cálculos sin calculadora.

Para resolver este tipo de problemas hay que seguir las **reglas de operación:**

1. Separar en términos;
2. Resolver lo que está dentro de paréntesis, corchetes y/o llaves;
3. Resolver los productos; y
4. Resolver las sumas.

Problema 1: Calcule sin usar calculadora.

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}} \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} + \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} \left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} =$$

Lo primero que hay que hacer para empezar a calcular, de acuerdo a las reglas de operación enunciadas, es separar en términos. En este caso tenemos dos:

$$\underbrace{\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}\,\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}}}_{\text{término}\,1}+\underbrace{\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}}\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1}}_{\text{término}\,2}$$

Luego vamos a ir resolviendo los factores. En el primer término tenemos un producto de dos fracciones. Tomemos la primera fracción. ¿Es correcta la siguiente resolución?

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}=\frac{3^{2\,.\,3}}{3^{3\,.\,2}}=1$$

La respuesta es **NO**. Y ahora pregunto ¿por qué no es correcta? Porque el producto de los exponentes es válido cuando tenemos una potencia de potencia, es decir:

$$(x^n)^m=x^{nm}$$

En este caso, la base del exponente m es x^n y la base de n es x. Sin embargo, en el cálculo tenemos la siguiente situación:

$$x^{n^m}=x^{(n^m)}\neq(x^n)^m$$

donde, ahora, la base de m es n, y la base de n^m es x. Por lo tanto la resolución de la primera fracción del primer término es:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}=\frac{3^8}{3^9}=3^{8-9}=3^{-1}$$

Ahora analicemos el segundo factor del primer término. En este caso ¿tenemos una potencia de potencia? Sí, en este caso el denominador es una potencia de potencia explícita, mientras que en el numerador tenemos una raíz de raíz (que es equivalente a la potencia de potencia). Entonces,

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3\,.\,5]{3^{\frac{5}{3}}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})}}=\frac{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{15}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{9}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}\,\frac{1}{15}}}{\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{9}}}=\frac{3^{\frac{1}{9}}}{3^{\frac{1}{9}}}=1$$

De este modo, el primer término se reduce a:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}} \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} = 3^{-1}\,1 = 3^{-1} \tag{77}$$

En el segundo término tenemos una fracción; este tipo de expresiones suele traer bastantes complicaciones. Propongamos la siguiente resolución y después discutamos si es correcta.

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} = \frac{(-3)^{\frac{2}{2}}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{-3}{9^{\frac{1}{3}}}$$

¿Hay algún error en este razonamiento? Sí, hay más de un error. El error del numerador consiste en haber simplificado el exponente con el índice de la raíz. En el denominador el error está en haber supuesto que el exponente 2 tiene como base al número (-3). Analicémoslo por partes. Primero el numerador. Habíamos visto que cuando el índice y el exponente son iguales a un mismo número par, $2n$, resulta que $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, por lo tanto:

$$\sqrt{(-3)^2} = |3| = 3$$

Mientras que en el denominador tenemos que:

$$\sqrt[3]{-3^2} = \sqrt[3]{(-1)\,3^2} = \sqrt[3]{(-1)}\sqrt[3]{3^2} = (-1)3^{\frac{2}{3}} = -3^{\frac{2}{3}}$$

De este modo, el primer factor del segundo término es igual a:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} = \frac{3}{-3^{\frac{2}{3}}} = -3^{1-\frac{2}{3}} = -3^{\frac{3}{3}-\frac{2}{3}} = -3^{\frac{3-2}{3}} = -3^{\frac{1}{3}}$$

Por último, el segundo factor del segundo término lo escribimos de la siguiente manera:

$$\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = \left(9^{2\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left[(3^2)^{2\frac{1}{3}}\right]^{-1} = 3^{2\,.\,2\,.\,\frac{1}{3}\,.\,(-1)} = 3^{-\frac{4}{3}}$$

Luego el segundo término es igual a:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} \left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = -3^{\frac{1}{3}}\,3^{-\frac{4}{3}} = -3^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = -3^{\frac{-3}{3}} = -3^{-1} \tag{78}$$

Finalmente, de las operaciones 77 y 78 obtenemos el resultado:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}} \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} + \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} \left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = 3^{-1} - 3^{-1} = 0$$

Obviamente que ésta no es la única manera de pensar el ejercicio, hay muchos caminos posibles. La idea básica de este tipo de cálculos es llevar todas las potencias a una misma base para poder utilizar las propiedades de la potencia.

Problema 2: Calcule sin usar calculadora.

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} + 2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b} - (\log_4 2)^2\ \log_x x^4\ =$$

Nuevamente, como en el ejercicio anterior, lo primero que debemos hacer es separar en términos:

$$\underbrace{\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a}}_{\text{término 1}} + \underbrace{2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b}}_{\text{término 2}} - \underbrace{(\log_4 2)^2\ \log_x x^4}_{\text{término 3}}$$

Ahora analicemos término por término.

- Primer término:

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} = \frac{2\ \log_3 a}{\log_3 a} = \frac{2\,\cancel{\log_3 a}}{\cancel{\log_3 a}} = 2 \tag{79}$$

- Segundo término:

$$2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b} = 7\ \log_b b^{\frac{1}{7}} = 7\,\frac{1}{7}\ \log_b b = 1 \tag{80}$$

- Tercer término:

$$(\log_4 2)^2\ \log_x x^4 = \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 4}\right)^2 4\ \log_x x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 4 = \frac{1}{4}\,4 = 1 \tag{81}$$

Finalmente de las operaciones 79, 80 y 81 obtenemos el resultado:

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} + 2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b} - (\log_4 2)^2\ \log_x x^4 = 2 + 1 - 1 = 2$$

PRÁCTICA 1

1. Primero expresá los números decimales como fracción y luego calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora.

   a) $0,\hat{2} + 2,\widehat{15} - \sqrt[3]{0,\hat{6}\,.\,12} =$

   b) $\dfrac{0{,}05 + 0{,}75}{0{,}01 + 0{,}03} - \dfrac{0{,}2^3}{\sqrt[4]{0{,}0016}} =$

   c) $\sqrt{(0{,}1\,.\,0{,}3)^2 : (0{,}2 - 0{,}1)^2} - \sqrt{0{,}81} =$

   d) $\dfrac{0{,}7 + 1,\hat{3}}{1{,}22} + 0,\widehat{12}\,.\,3{,}3 - 0{,}9\,.\,0{,}1\hat{7} + \sqrt{1,\hat{7}\,.\,0{,}25} =$

2. Calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora. Dejá expresado el resultado en notación científica.

   a) $\left(\dfrac{8{,}4 \times 10^{19}}{10^{28}}\right).\,5 =$

   b) $-8{,}13 \times 10^{14} - (-3{,}17 \times 10^{15}) =$

   c) $(7{,}3 \times 10^{-12}) : (2{,}5 \times 10^{-24}) =$

3. Calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora.

   a) $\dfrac{2}{3} - 2\left(-\dfrac{1}{4}\right).\,(-12) + 2^{-2} =$

   b) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^9} \div \left(-\dfrac{2}{9}\right)^{-1} + \dfrac{15}{2} \div (-30) + \dfrac{4}{9} =$

c) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-4} : \left(-\dfrac{1}{18}\right) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{6} : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{7}{8} - 1\right) . (-3)^3} =$

d) $\dfrac{\frac{4}{5} : \frac{6}{25}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}} . \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1}} =$

e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/3} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{1/3} \dfrac{3^{3^{-1}}}{3^{-1^3}} \left(-\dfrac{7}{3} + 2\right)^{-2/(-3)} \sqrt[3]{27^{-2/3}} + \dfrac{(-3^4)^3}{\sqrt{(-3)^{3\,.\,2^3}}} =$

f) $\dfrac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{-2^2 + 2^3}} \dfrac{\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/3}\right]^{-3}} \dfrac{2^{2^3}}{2^{3^2}} \dfrac{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}}{\left[\left(\sqrt{(3+0+4)^2}\right)^2\right]^0} =$

4. Encuentra los errores en los siguientes desarrollos.

a) $\dfrac{-4^2}{2^{3^2}} . 2^{(3^2)} . \sqrt{(-2)^4} + 6^5 . (-6)^{(-3)} . 6^{-1/2} . \left(\dfrac{1}{6}\right)^{5/2} . \sqrt{(-6)^2} + \dfrac{3^{3^0}}{3^{0^3}} =$

$$
\begin{aligned}
&= (-2^2)^2 . 2^{3^2 - 3^2} . \sqrt{(-2)^4} + \frac{6^{5-3-\frac{1}{2}}}{6^{5/2}} . (-6)^{2/2} + \frac{3^0}{3^0} = \\
&= (-2)^4 . 2^0 . (-2)^2 + 6^{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}} . (-6) + 1 = \\
&= (-2)^{4+2} + 6^{-2} - 5 = \\
&= (-2)^6 + \frac{1}{6^2} - 5 = \\
&= 65 - 5 + \frac{1}{36} = \\
&= 59 + \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

b) $-2^3\,(-2^{2^3})\,(-2^{-3^2}) - \left(2^3 - \dfrac{2^{(2^3)}}{2^6}\right) \dfrac{\sqrt{(-2)^4}}{\sqrt{\frac{1}{(-2)^{-4}}}} + \left[\left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^{-1/3}\right]^{-1} =$

$$\begin{aligned}
&= -2^3\,(-2^{6-6}) - (2^3 - 2^{8-6})\,(-2)^{4/2}\,(-2)^{-4/2} + 2^{(-3)(-1/3)(-1)} = \\
&= -2^3 - 1 - 2^3 + 2^2(-2)^0 + 2^{-1} = \\
&= 2\,(-2^3) - 1 + 2^2\,.\,1 + \frac{1}{2} = \\
&= -2^4 - 1 + 4 + \frac{1}{2} = \\
&= -16 + 3 + \frac{1}{2} = \\
&= \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\sqrt{(-2)^6}}{\sqrt[3]{(-2)^9}} \cdot \dfrac{2^{2^3}}{2^{3^2}} - \dfrac{(-2)^{3/3}}{\sqrt[3]{-2^3}} \cdot \dfrac{-2^4}{\sqrt[4]{2^2+2^2}} \cdot \dfrac{2^{3/4}}{\left[\left(\frac{7}{5} - \frac{9}{10}\right)^{-1/2}\right]^8} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{6/2}}{(-2)^{9/3}} \cdot \frac{2^8}{2^9} - \frac{(-2)}{(-2)^{3/3}} - \frac{2^4}{\sqrt[4]{16}} \cdot \frac{2^{3/4}}{\left(\frac{14-9}{10}\right)^{-8/2}} = \\
&= \frac{2^3}{(-2)^3} \cdot \frac{1}{2} - 1 - \frac{2^{4+\frac{3}{4}}}{\sqrt[\cancel{4}]{2^{\cancel{4}}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}\,2}\right)^{-4}} = \\
&= -\frac{2^3}{2^3}\,\frac{1}{2} - 1 - 2^{\frac{19}{4}-1}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{2^{-4}}\right)} = \\
&= -\frac{1}{2} - 1 - 2^{\frac{15}{4}+4} = \\
&= -\frac{3}{2} - 2^{\frac{31}{4}}
\end{aligned}$$

5. Sabiendo que $\log_a(x) = 2$, $\log_a(y) = 3$ y $\log_a(z) = 3/2$ calculá:

a) $\log_a(x\,.\,y^2) =$

b) $\log_a \sqrt{x^3\,.\,y} =$

c) $\log_a \left(\dfrac{x}{y\,z}\right)^5 =$

d) $\log_z \left(\dfrac{\sqrt{x}}{y^3\,z^4}\right)^6 =$

e) $\log_t \left(\dfrac{t^3\, x^5\, \sqrt{y}}{x\, y\, t} \right) =$

6. Calculá sin utilizar calculadora suponiendo que las variables toman valores permitidos.

a) $\dfrac{4\ \log_2 4}{3\ \log_3 3} \,.\, (\log_5 25)^{-1} - \dfrac{1}{3} =$

b) $\dfrac{(\log_2 8)^2}{\log_2 \sqrt{2} + \frac{1}{2}} =$

c) $\log_3 \left[\dfrac{3\,a + 9}{a + 3} \right]^3 =$

d) $\dfrac{(\log_3 a)^2 + \frac{\log_9 a^2}{\log_a 9}}{\log_{2+1}(2\,a - a)} \,.\, e^{\ln(\frac{1}{3})} =$

e) $\log_a(a\,.\,b) + (\log_{1/a} 2)^{-1} =$

f) $\log_2 w - \log_2 \left(\dfrac{w}{q} \right) + (\log_{q^2}(4^{-1}))^{-1} - 2^{2\,\log_2 1} =$

g) $\ln e^2 + \dfrac{1}{2}\, (\log_a a^8)^{1/3} =$

h) $\log_3 (27)^{2/3} - \log_{4^3} 4 =$

i) $\dfrac{\log_{11}(1/11)}{\log_b(b^{-2})} - \log_3 \sqrt{3} =$

j) $\dfrac{\log_5 15}{\log_5 3} + \log_3 \left(\dfrac{1}{5} \right) + \left(5^{\frac{1}{2}\,\log_5 3} \right)^2 \log_{a+b} \sqrt[3]{a + b} =$

7. Problemas con logaritmos

a) Una de las aplicaciones de la función logarítmica es el cálculo del pH de una sustancia a partir de la concentración de iones positivos de Hidrógeno ($[H]^+$). Así, pH = - log $[H]^+$.

I. Calculá el pH de una solución cuya concentración de iones de hidrógeno es: $[H]^+ = 10^{-8}$; $[H]^+ = 0{,}03 \times 10^{-4}$; $[H]^+ = 5 \times 10^{-14}$; $[H]^+ = 5 \times 10^{-7}$ y $[H]^+ = 3 \times 10^{-3}$.

II. Calculá $[H]^+$ para soluciones cuyo pH es: pH = 7, pH = 11, pH = 3 y pH = 6.

b) La magnitud R (en la escala de Richter) de un terremoto de intensidad I se define como: $R = \log \left(\dfrac{I}{I_0} \right)$, donde I_0 es la intensidad mínima utilizada como referencia.

I. Un terremoto tiene una intensidad de 4×10^8 veces I_0 ¿Cuál es su magnitud en la escala Richter?

ii. El terremoto de Anchorage, Alaska, del 27 de marzo de 1964, tuvo una intensidad de $2{,}5 \times 10^8$ veces I_0 ¿Cuál es su magnitud en la escala Richter?

iii. ¿Cuál es la intensidad de un terremoto que en la escala Richter llega a los 5 puntos? ¿Y uno que llega a los 7,8 puntos?

c) Una escala utilizada para medir la magnitud de un sismo es la escala de Richter. La cantidad de energía liberada en un movimiento sísmico está dada por la fórmula: $\log E = 1{,}5R + 11{,}8$, donde E es la energía liberada medida en ergios y R es la magnitud del sismo en grados en la escala de Richter.

i. Expresá la energía liberada en su forma exponencial.

ii. ¿Qué cantidad de energía se libera en un temblor de grado 4?, ¿y en uno de grado 5?

iii. ¿Cuál es la relación numérica entre ambos valores?

iv. El aumento de un grado en la escala Richter, ¿Qué aumento representa, aproximadamente, en la cantidad de energía liberada? Y si el aumento fuera de dos grados, ¿qué incremento se produce en la energía liberada?

v. Desde que se dispone de instrumentos de medición sísmica, el terremoto de mayor magnitud registrada es el de Valdivia en el año 1960, que tuvo una magnitud de 9,5 grados en la escala de Richter. Compará la energía liberada en este terremoto con la de Caucete del año 1977 que fuera de 7,4 grados de la misma escala.

d) La magnitud aparente, m, de una estrella mide el brillo observado de la misma, mientras que la magnitud absoluta, M, mide el brillo que observaríamos si la estrella estuviera a 10 pc[9] de distancia. Cuanto más chica es la magnitud (absoluta o aparente), más brillante será la estrella. Conociendo ambas magnitudes se puede calcular la distancia, d, a la estrella como $m - M = -5 + 5\log(d)$.

i. Calculá la distancia al Sol sabiendo que su magnitud aparente es igual a $-26{,}7$ y su magnitud absoluta es 4,9.

ii. Sabiendo que la magnitud absoluta de Sirio es 1,4 y se encuentra a una distancia aproximada de 2,7 pc y que para la estrella Antares $M = -4{,}8$ y $d = 130$ pc. ¿Cuál de las dos estrellas se ve más brillante?

[9] El parsec (pc) es una medida astronómica de distancia, es aproximadamente igual a 3,26 años luz ($3{,}09 \times 10^{13}$ km)