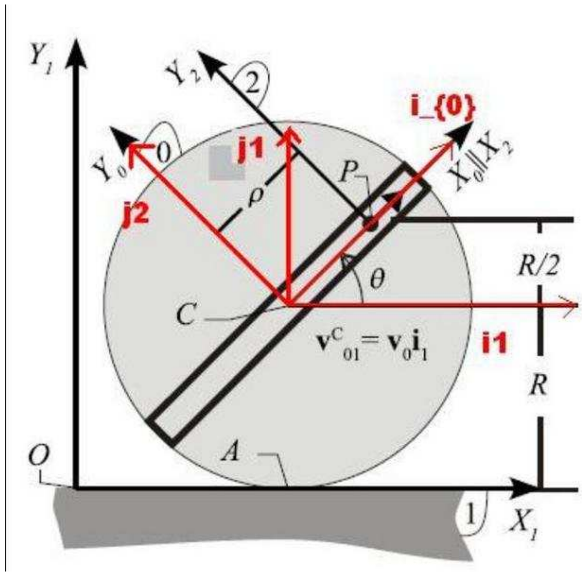
CURSO DE NIVELACIÓN

Lectura complementaria

Más sobre vectores



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Realizado por Yael Aidelman

en el marco del Observatorio Pedagógico

La Plata, 2012

Más sobre vectores

En esta sección vamos a demostrar todas las propiedades enunciadas en el capítulo de Vectores. Además veremos cómo se puede escribir la expresión de una recta en forma vectorial.

Propiedades del producto entre vectores

Propiedades del producto escalar

1. **Conmutativo**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{1}$$

   Esto se muestra fácilmente:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z \\ &= \vec{B} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

2. **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C} \tag{2}$$

La demostración es la siguiente

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot(\vec{B}\pm\vec{C}) &= \vec{A}\cdot(B_x\pm C_x, B_y\pm C_y, B_z\pm C_z)\\
&= A_x(B_x\pm C_x)+A_y(B_y\pm C_y)+A_z(B_z\pm C_z)\\
&= A_xB_x\pm A_xC_x+A_yB_y\pm A_yC_y+A_zB_z\pm A_zC_z\\
&= (A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\pm(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)\\
&= \vec{A}\cdot\vec{B}\pm\vec{A}\cdot\vec{C}
\end{aligned}$$

3. **Producto escalar por un escalar**

   Sea k un número real cualquiera, luego

   $$k(\vec{A}\cdot\vec{B})=(k\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(k\vec{B}) \tag{3}$$

   La demostración es inmediata, por lo que se la dejaremos hacer al lector.

4. **El producto escalar de un vector con sí mismo es igual al cuadrado de su módulo**

   $$\vec{A}\cdot\vec{A}=(\vec{A})^2=|\vec{A}|^2=A^2 \tag{4}$$

   Esto se obtiene aplicando la definición de producto escalar y la definición de módulo de un vector por lo que también le dejaremos la demostración al lector.

5. **Cuadrado de un binomio de vectores**

   $$(\vec{A}\pm\vec{B})^2=(\vec{A})^2\pm 2\vec{A}\cdot\vec{B}+(\vec{B})^2 \tag{5}$$

   Para demostrarlo utilizamos las propiedades asociativa y conmutativa

   $$\begin{aligned}
   (\vec{A}\pm\vec{B})^2 &= (\vec{A}\pm\vec{B})\cdot(\vec{A}\pm\vec{B})\\
   &= \vec{A}^2\pm\vec{A}\cdot\vec{B}\pm\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{B}^2\\
   &= \vec{A}^2\pm 2\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}^2
   \end{aligned}$$

   Del producto escalar de un vector con sí mismo también se puede escribir que

   $$\begin{aligned}
   (\vec{A}\pm\vec{B})^2 &= |\vec{A}\pm\vec{B}|^2\\
   &= \vec{A}^2\pm 2\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}^2\\
   &= |\vec{A}|^2\pm 2\vec{A}\cdot\vec{B}+|\vec{B}|^2
   \end{aligned}$$

Propiedades del producto vectorial

1. **Anticonmutativo:**

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) \tag{6}$$

Para demostrar esta propiedad simplemente aplicamos la definición de producto vectorial:

$$\begin{aligned}
-(\vec{B} \times \vec{A}) &= -[(B_y A_z - B_z A_y)\breve{i} - (B_x A_z - B_z A_x)\breve{j} + (B_x A_y - B_y A_x)\breve{k}] \\
&= -(B_y A_z - B_z A_y)\breve{i} + (B_x A_z - B_z A_x)\breve{j} - (B_x A_y - B_y A_x)\breve{k} \\
&= (-B_y A_z + B_z A_y)\breve{i} + (B_x A_z - B_z A_x)\breve{j} + (-B_x A_y + B_y A_x)\breve{k} \\
&= (B_z A_y - B_y A_z)\breve{i} - (-B_x A_z + B_z A_x)\breve{j} + (B_y A_x - B_x A_y)\breve{k} \\
&= (A_y B_z - A_z B_y)\breve{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k} \\
&= \vec{A} \times \vec{B}
\end{aligned}$$

2. **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C} \tag{7}$$

La demostración es simple. Primero vamos a calcular la suma y después vamos a realizar el producto vectorial. Luego vamos a reacomodar las cosas para llegar a la expresión del segundo miembro. Entonces

$$\vec{B} \pm \vec{C} = (B_x \pm C_x, B_y \pm C_y, B_z \pm C_z)$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = [A_y(B_z \pm C_z) - A_z(B_y \pm C_y)]\breve{i} \\
&-[A_x(B_z \pm C_z) - A_z(B_x \pm C_x)]\breve{j} + [A_x(B_y \pm C_y) - A_y(B_x \pm C_x)]\breve{k} \\
&= [A_y B_z \pm A_y C_z - A_z B_y \mp A_z C_y]\breve{i} - [A_x B_z \pm A_x C_z - A_z B_x \mp A_z C_x]\breve{j} \\
&+[A_x B_y \pm A_x C_y - A_y B_x \mp A_y C_x]\breve{k} \\
&= (A_y B_z - A_z B_y)\breve{i} + (\pm A_y C_z \mp A_z C_y)\breve{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{j} \\
&-(\pm A_x C_z \mp A_z C_x)\breve{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k} + (\pm A_x C_y \mp A_y C_x)\breve{k} \\
&= [(A_y B_z - A_z B_y)\breve{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k}] \\
&+[(\pm A_y C_z \mp A_z C_y)\breve{i} - (\pm A_x C_z \mp A_z C_x)\breve{j} + (\pm A_x C_y \mp A_y C_x)\breve{k}] \\
&= [(A_y B_z - A_z B_y)\breve{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k}] \\
&\pm[(A_y C_z - A_z C_y)\breve{i} - (A_x C_z - A_z C_x)\breve{j} + (A_x C_y - A_y C_x)\breve{k}] \\
&= \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}
\end{aligned}$$

3. **Producto vectorial por un escalar**

   Sea k un número real cualquiera, luego

$$k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}) \tag{8}$$

   Para demostrar esta propiedad aplicamos la definición del producto vectorial y luego realizamos el producto entre un vector y un escalar.

$$\begin{aligned}
&k(\vec{A} \times \vec{B}) = k[(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}] \\
&= k(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - k(A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + k(A_xB_y - A_yB_x)\breve{k} \\
&= [(kA_y)B_z - (kA_z)B_y]\breve{\imath} - [(kA_x)B_z - (kA_z)B_x]\breve{\jmath} + [(kA_x)B_y - (kA_y)B_x]\breve{k} \\
&= (k\vec{A}) \times \vec{B}
\end{aligned}$$

   Del mismo modo se demuestra que $k(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (k\vec{B})$.

4. **El producto vectorial de un vector con sí mismo es igual al vector nulo**

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0} \tag{9}$$

   La demostración es muy simple, por lo que se la dejaremos hacer al lector.

5. **El vector resultante del producto vectorial es perpendicular a los vectores involucrados en el producto**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Longrightarrow \vec{C} \perp \vec{A} \text{ y } \vec{C} \perp \vec{B} \tag{10}$$

   Anteriormente vimos que si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo. Por lo tanto hay que demostrar que $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$ y que $\vec{C} \cdot \vec{B} = 0$. Ahora, como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ entonces $\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}$. Luego

$$\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{A} &= (A_yB_z - A_zB_y)A_x - (A_xB_z - A_zB_x)A_y + (A_xB_y - A_yB_x)A_z \\
&= \cancel{A_yB_zA_x} - \cancel{A_zB_yA_x} - \cancel{A_xB_zA_y} + \cancel{A_zB_xA_y} + \cancel{A_xB_yA_z} - \cancel{A_yB_xA_z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)B_x - (A_xB_z - A_zB_x)B_y + (A_xB_y - A_yB_x)B_z \\
&= \cancel{A_yB_zB_x} - \cancel{A_zB_yB_x} - \cancel{A_xB_zB_y} + \cancel{A_zB_xB_y} + \cancel{A_xB_yB_z} - \cancel{A_yB_xB_z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

6. **Doble producto vectorial**

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{11}$$

Esta propiedad la vamos a demostrar por partes. Teniendo en cuenta que $\vec{B}\times\vec{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\breve{i} - (B_xC_z - B_zC_x)\breve{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\breve{k}$, calculamos el primer miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \;&=\; [A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x)]\breve{i} \\
&\quad -[A_x(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{j} \\
&\quad +[-A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{k}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular los dos términos del segundo miembro.

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) \;&=\; B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{i} \\
&\quad +B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{j} \\
&\quad +B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \;&=\; C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{i} \\
&\quad +C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{j} \\
&\quad +C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{k}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{i} \\
&+B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{j} + B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{k} \\
&-C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{i} - C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{j} \\
&-C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{k} \\
&= [\cancel{B_xA_xC_x} + B_xA_yC_y + B_xA_zC_z - \cancel{C_xA_xB_x} - C_xA_yB_y - C_xA_zB_z]\breve{i} \\
&+[B_yA_xC_x + \cancel{B_yA_yC_y} + B_yA_zC_z - C_yA_xB_x - \cancel{C_yA_yB_y} - C_yA_zB_z]\breve{j} \\
&+[B_zA_xC_x + B_zA_yC_y + \cancel{B_zA_zC_z} - C_zA_xB_x - C_zA_yB_y - \cancel{C_zA_zB_z}]\breve{k} \\
&= [A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x)]\breve{i} \\
&-[A_x(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{j} \\
&+[-A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{k} \\
&= \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})
\end{aligned}$$

De aquí se puede ver que el producto vectorial no es asociativo

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \\
&= -[\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})] \\
&= \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) \\
&= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

7. **Producto mixto**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \tag{12}$$

Para demostrar esta propiedad vamos a calcular los dos miembros y ver que son iguales. Entonces, el primer miembro será

$$\begin{aligned}
&\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \\
&= \vec{A} \cdot [(B_y C_z - B_z C_y)\breve{i} - (B_x C_z - B_z C_x)\breve{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\breve{k}] \\
&= A_x(B_y C_z - B_z C_y) - A_y(B_x C_z - B_z C_x) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)
\end{aligned}$$

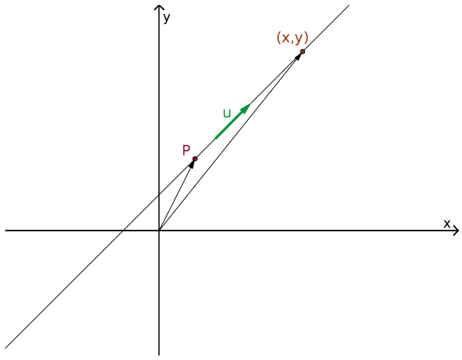
Y el segundo miembro será

$$\begin{aligned}
&\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \\
&= [(A_y B_z - A_z B_y)\breve{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k}] \cdot \vec{C} \\
&= (A_y B_z - A_z B_y)C_x - (A_x B_z - A_z B_x)C_y + (A_x B_y - A_y B_x)C_z \\
&= A_y B_z C_x - A_z B_y C_x - A_x B_z C_y + A_z B_x C_y + A_x B_y C_z - A_y B_x C_z \\
&= A_x(B_y C_z - B_z C_y) - A_y(B_x C_z - B_z C_x) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\
&= \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}
\end{aligned}$$

Expresión vectorial de la recta

En el capítulo 4 estudiamos de forma detallada la función lineal y vimos diferentes formas de obtener su forma funcional. Ahora vamos a ver cómo se puede representar una recta de manera vectorial.

Para encontrar la representación vectorial de una función lineal es necesario conocer un vector $\vec{u}$ contenido (o paralelo) a la recta y un punto P perteneciente a ella.



A todo punto del espacio se le puede asociar un vector cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo es el punto en cuestión. De este modo, podemos definir el vector $\vec{P} = (p_x, p_y)$ asociado al punto P. Luego tomamos un punto cualquiera sobre la recta y le asociamos el vector $\vec{x} = (x, y)$. Haciendo la diferencia $\vec{x} - \vec{P}$ obtenemos un vector $\vec{u'}$ con origen en el punto P y extremo en el punto (x, y) que pertenece a la recta. Por lo tanto $\vec{u'}$ es paralelo a $\vec{u}$, luego existe un número real[1] k tal que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$. Finalmente, la expresión vectorial de la recta es

$$\begin{aligned} \vec{x} - \vec{P} &= k\,\vec{u} \\ (x, y) - (p_x, p_y) &= k\,(u_x, u_y) \\ (x - p_x, y - p_y) &= (k\,u_x, k\,u_y) \end{aligned} \tag{13}$$

Para encontrar la forma explícita hay que escribir la expresión anterior pero para cada componente:

$$\begin{aligned} x - p_x &= k\,u_x \\ y - p_y &= k\,u_y \end{aligned} \tag{14}$$

Despejando k en ambas expresiones resulta que

$$\begin{aligned} &\frac{x - p_x}{u_x} = \frac{y - p_y}{u_y} \\ &(x - p_x)\frac{u_y}{u_x} + p_y = y \\ &\underbrace{\frac{u_y}{u_x}}_{=a}\;x \underbrace{- \frac{u_y}{u_x}\,p_x + p_y}_{=b} = y \\ &a\,x + b = y \end{aligned}$$

[1] La existencia de un escalar k tal que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$, donde $\vec{u}$ y $\vec{u'}$ son dos vectores paralelos cualesquiera se demuestra utilizando la definición del producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{u'} = u_x\,u'_x + u_y\,u'_y$. Pero, como queremos que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$ resulta que $u'_x = k\,u_x$ y $u'_y = k\,u_y$. Entonces, $\vec{u} \cdot \vec{u'} = k(u_x^2 + u_y^2) = k|\vec{u}|^2$. Finalmente, encontramos el valor del escalar $k = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u'}}{|\vec{u}|^2}$