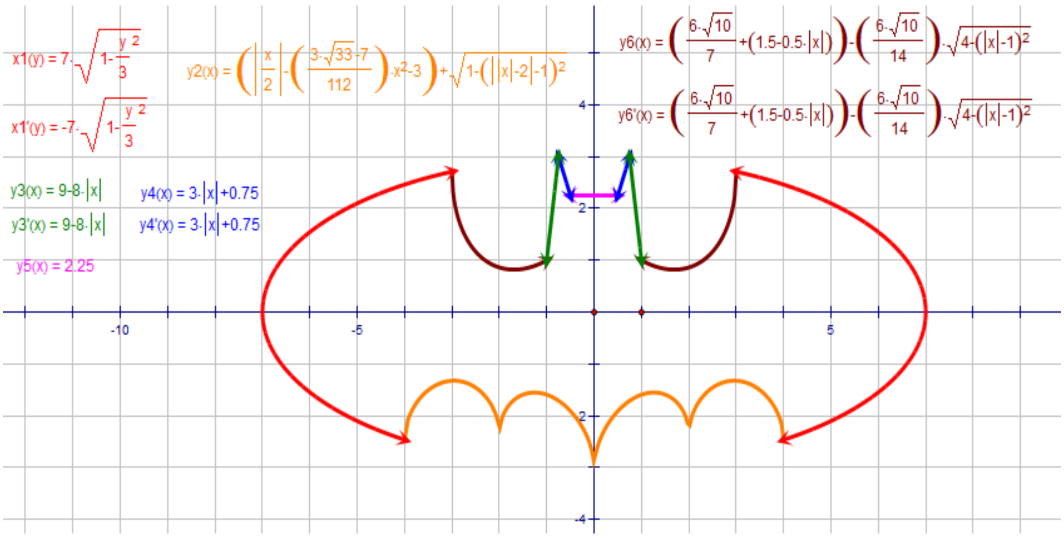
CURSO DE NIVELACIÓN

Lectura complementaria

Funciones no polinómicas



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FUNCIONES NO POLINÓMICAS

En esta sección vamos a mostrar las gráficas de algunas funciones no polinómicas.

Función módulo o valor absoluto

La función módulo se define como:

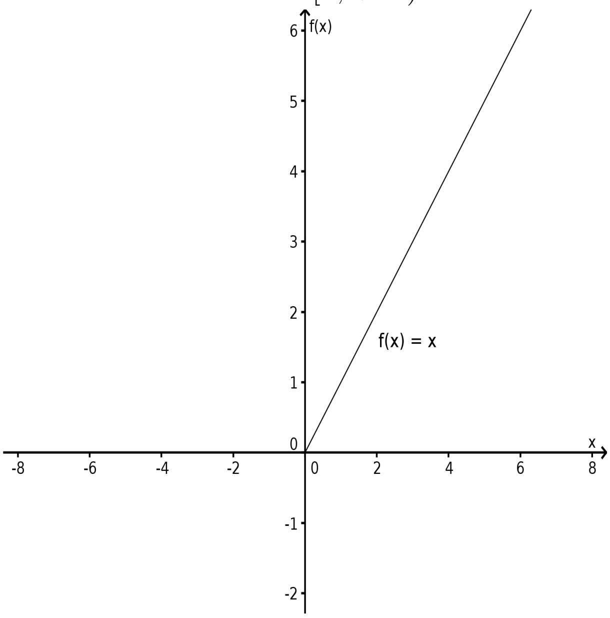
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Para graficar esta función hacemos el siguiente análisis:
Finalmente, juntando ambos resultados, obtenemos que la gráfica de $f(x) = |x|$ es:
Ahora, veamos algunas variantes de la función módulo. Supongamos que a, b y c son tres números reales y positivos. Entonces, siguiendo el análisis anterior:

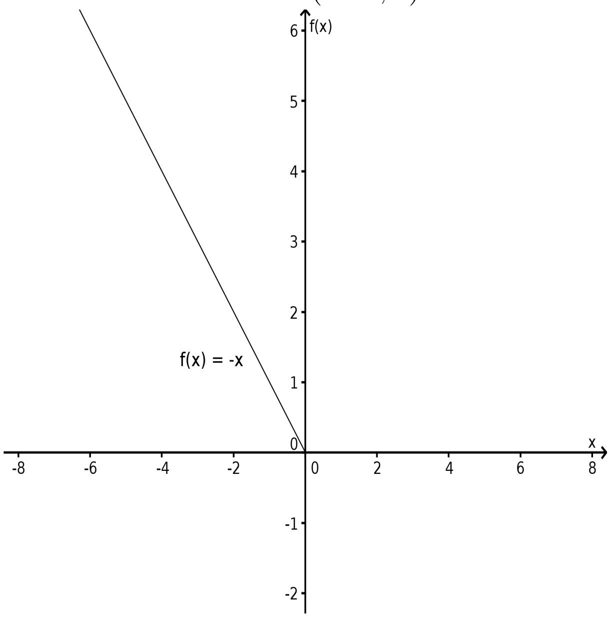
- $\boldsymbol{f(x) = |x \pm a|}$

$$x \pm a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x \pm a \quad \text{si } x \geq \mp a$$
$$x \pm a < 0 \Longrightarrow f(x) = -(x \pm a) = -x \mp a \quad \text{si } x < \mp a$$

Si $x \geq 0$ resulta que $f(x) = x$ y la gráfica de $f(x)$ es una recta cuyo dominio es el intervalo $[0; +\infty)$.



Si $x < 0$ resulta que $f(x) = -x$ y la gráfica de $f(x)$ es una recta cuyo dominio es el intervalo $(-\infty; 0)$.

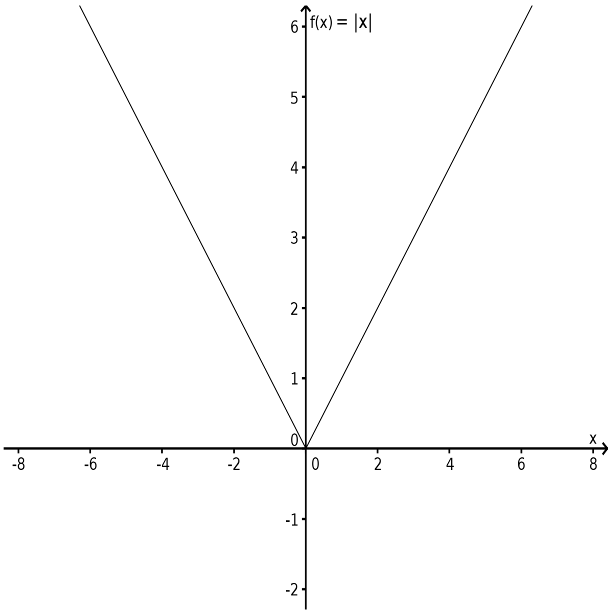


- $\boldsymbol{f(x) = |x + a| - b}$

$$x + a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x + a - b \quad \text{si } x \geq -a$$
$$x + a < 0 \Longrightarrow f(x) = -(x + a) - b = -x - a - b \quad \text{si } x < -a$$

- $\boldsymbol{f(x) = c\,|x + a| - b}$

$$x + a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = c\,(x + a) - b = c\,x + c\,a - b \quad \text{si } x \geq -a$$
$$x + a < 0 \Longrightarrow f(x) = -c\,(x + a) - b = -c\,x - c\,a - b \quad \text{si } x < -a$$



cuyo dominio e imagen son

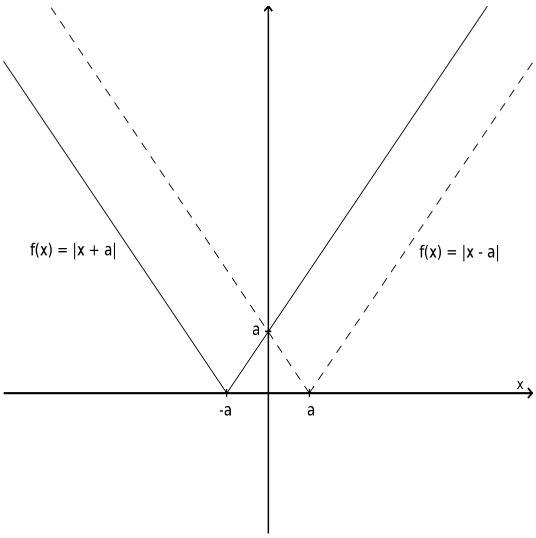
$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

El mismo análisis se hace cuando a, b ó c son negativos.

Otras variantes de la función módulo se da cuando se suma (o se resta) o se multiplica por una expresión que depende de la misma variable que la del valor absoluto.

Ejemplo: *Consideremos la función* $f(x) = |x| + x$

$$x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x + x = 2\,x$$
$$x < 0 \Longrightarrow f(x) = -x + x = 0$$



En este caso el dominio y la imagen de ambas funciones son

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = [0; +\infty)$$

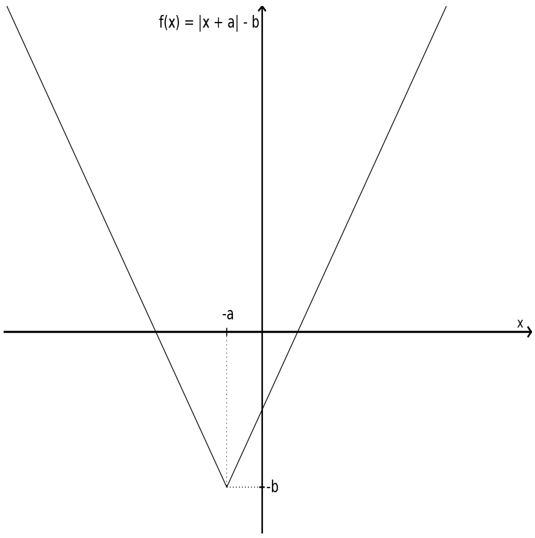
Función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada está definida sólo para argumentos positivos.

$$\begin{cases} f : [0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Así definida, la gráfica de $f(x)$ es una media parábola cuyo eje de simetría es el de las abcisas

Del mismo modo que sucede con la función módulo, uno puede desplazar la gráfica modificando el argumento o sumando y/o multiplicando por un número real cualquiera. Tomemos nuevamente tres números a, b y c reales y positivos. Entonces,



En este caso el dominio y la imagen son

$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-b; +\infty)$

Función logaritmo

La definición de logaritmo es:

$$\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \neq 1,\ \log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

donde a es la base y b el argumento. De modo que la función logarítmica será:

$$\begin{cases} f\,:\ (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log_a x \\ a > 0 \text{ y } a \neq 1 \end{cases}$$

El dominio y la imagen son:

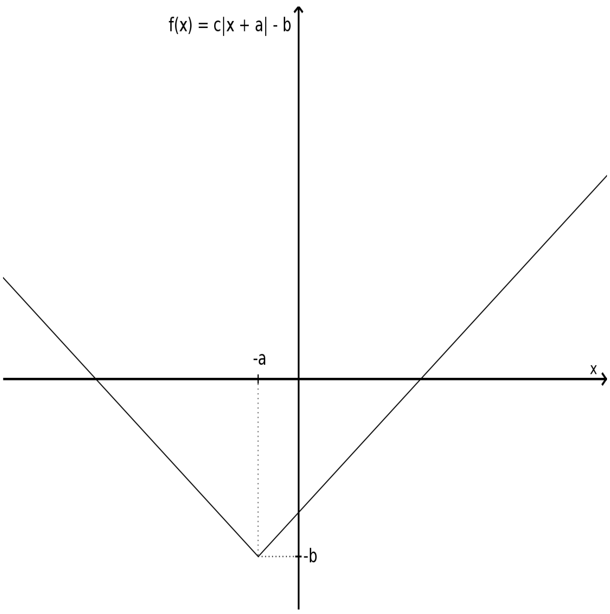
$$\begin{aligned} &Dom(f) = (0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \\ &Im(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

En general, las funciones logarítmicas más utilizadas son:

Logaritmo decimal: es cuando se toma el logaritmo en base 10, y se escribe como $\log x \equiv \log_{10} x$. Es decir que la función del logaritmo decimal se define como:

$$\begin{cases} f\,:\ (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log x \end{cases}$$

Logaritmo natural o neperiano: es cuando se toma el logaritmo en base e (el número neperiano es un número irracional, $e = 2{,}718281828\ldots$), y se escribe como $\ln x \equiv \log_e x$. Es decir que la función del logaritmo natural se define como:

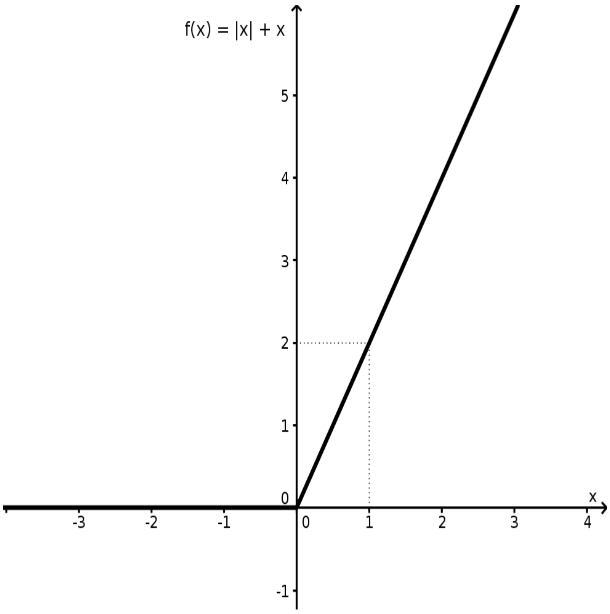


En este caso el dominio y la imagen son

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = [-b; +\infty)$$

$$\begin{cases} f : (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \ln x \end{cases}$$

Algunos ejemplos de funciones logarítmicas son las siguientes (a, b y c son tres números reales y positivos).



En este caso el dominio y la imagen son

$$\begin{aligned}&Dom(f) = \mathbb{R}\\&Im(f) = [0; +\infty)\end{aligned}$$

Función exponencial

La función exponencial se define como:

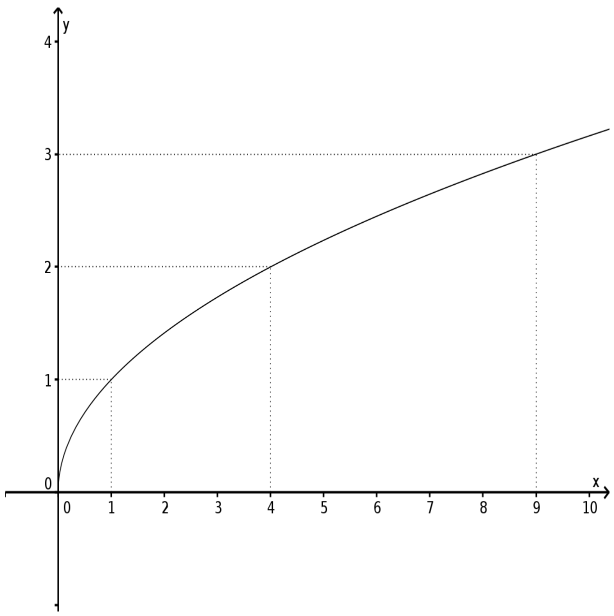
$$\begin{cases} f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a^x \end{cases}$$

donde a es un número positivo cualquiera. El dominio y la imagen son:

$$\begin{aligned}&Dom(f) = \mathbb{R}\\&Im(f) = \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

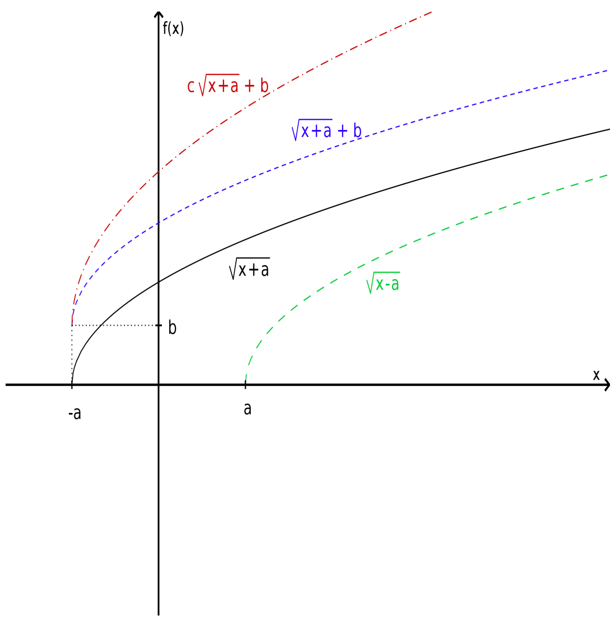
El argumento de la exponencial está obligado a ser un número positivo porque x puede tomar cualquier valor, por ejemplo si $a = 3$ entonces tendremos que $f(0) = 3^0 = 1$, $f(1) = 3^1 = 3$ y $f(1/2) = 3^{1/2} = \sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$, sin embargo si $a = -3$ tendremos que $f(0) = (-3)^0 = 1$, $f(1) = (-3)^1 = -3$ y $f(1/2) = (-3)^{1/2} = \sqrt{-3} = \nexists$. Generalizando tenemos que las potencias racionales con denominador par y las irracionales sólo están definidas para números positivos. Por esto las expresiones exponenciales estarán definidas sólo si la base es positiva.

Al igual que en las funciones logarítmicas, las bases más utilizadas son $a = 10$ y $a = e$.



Su dominio e imagen son

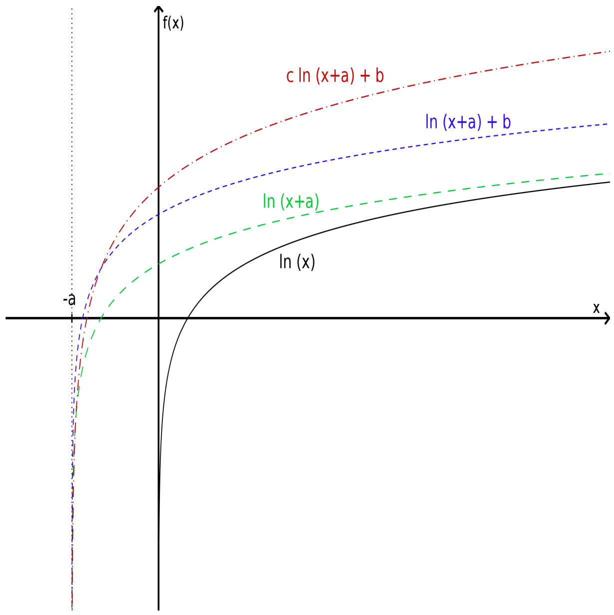
$$Dom(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$Im(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+a} \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [0; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+a} + b \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [b; +\infty) \end{cases}$$

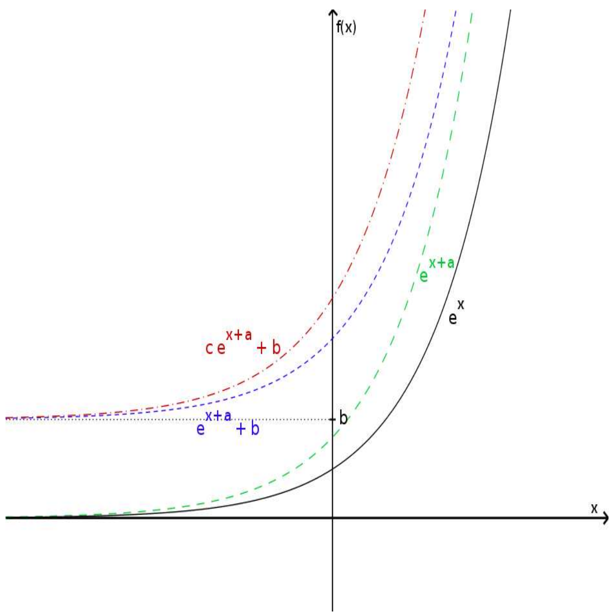
$$\begin{cases} f(x) = c\,\sqrt{x+a} + b \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [b; +\infty) \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(x) = \ln(x+a) \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x+a) + b \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = c\,\ln(x+a) + b \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f(x) = e^{x+a} \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{x+a} + b \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (b; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = c\,e^{x+a} + b \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (b; +\infty) \end{cases}$$