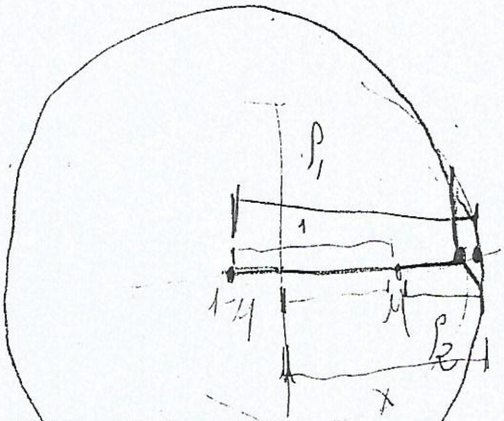
$2\langle T\rangle + \langle U\rangle = 0$



MECÁNICA CELESTE I

Segundo parcial - Primera fecha. 2004

1) Se tiene un sistema de N cuerpos masivos. Decir en que casos se verifica (y por qué) y qué forma adopta el teorema del virial.
i) El sistema es estacionario.
ii) Las posiciones de las partículas no permanecen acotadas para todo tiempo t.
iii) Las posiciones y velocidades de las partículas permanecen acotadas para todo tiempo t.

2) Considere el sistema Sol, Neptuno y un transneptuniano como un problema restringido de 3 cuerpos. Inicialmente la partícula se mueve con velocidad pependicular al eje x del sistema rotante tal que su órbita osculante (movimiento heliocéntrico instantáneo) es circular con movimiento medio

$$n = \frac{2}{3} n_N \tag{1}$$

donde n_N es el movimiento medio de Neptuno y su masa $\mu = 0.00005$
a) Hallar la constante de Jacobi C para el transneptuniano.
b) Determinar si este objeto puede ingresar dentro de la esfera de Hill de Neptuno.

3) Demostrar que los puntos triangulares equiláteros del problema restringido de los 3 cuerpos son puntos de equilibrio. Explicar en lineas generales como se estudia la estabilidad de los mismos.

4) Una partícula se mueve en el campo central $\mathbf{F}(r) = \frac{-\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza perturbadora por unidad de masa dada por:

$$\mathbf{F}_p = T\frac{\mathbf{V}}{V}. \tag{2}$$

Las ecuaciones para la variación de los elementos obitales son

$$\frac{da}{dt} = .2Va^2\frac{T}{\mu}, \tag{3}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\sin\nu\frac{T}{eV}, \tag{4}$$

$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot x = -x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x$

$n = \sqrt{\frac{k^2 M_\odot}{a^3}} \to a = \left(\frac{k^2 M_\odot}{n^2}\right)$

$$U_{xx} = 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)(x-x_1)^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(x-x_2)}{\rho_2^5}$$

$$U_{xy} = \frac{3(1-\mu)(x-x_1)y}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(x-x_2)y}{\rho_2^5} = U_{yx}.$$

$U_{xz} =$

$\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$ $\quad 1 - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)y^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu}{\rho_2^5}y^2.$

$1/2 + \frac{2}{2}$

$\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\ \frac{1}{2}$

$$\frac{de}{dt} = 2\left(\cos\nu + e\right)\frac{T}{V}. \tag{5}$$

Considerar una fuerza de *roce* por unidad de masa dada por

$$T = -cV^2 \tag{6}$$

$1 - \frac{1}{2}$

Demostrar que la variación de los elementos orbitales correspondiente a un período orbital está dada por

$$\Delta a = -2ca^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(1+e\cos E)^3}{1-e\cos E}}\, dE, \tag{7}$$

$\frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

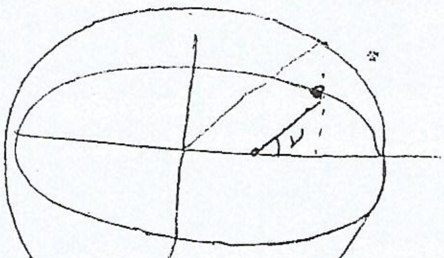
$$\Delta e = -2ca\left(1-e^2\right)\int_0^{\pi} \cos E\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\, dE, \tag{8}$$

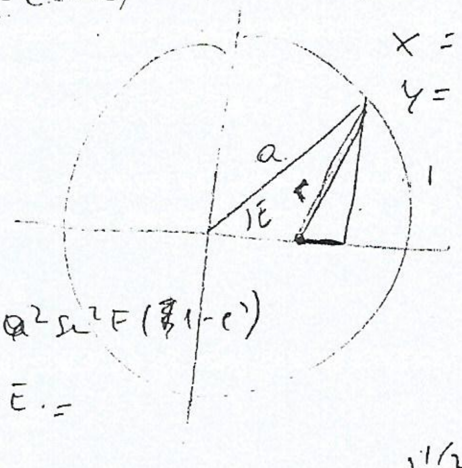
$$\Delta\omega = 0. \tag{9}$$

$\frac{\operatorname{sen}\nu}{a^2} = \frac{2\operatorname{sen}E\cos E + (-1-e^2)\operatorname{sen}E}{(1-e\cos E)^2}$

$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E}$

$\operatorname{sen}\nu \cdot \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{a^2(1-e\cos E)^2} = \frac{-\operatorname{sen}E(1-e\cos E) + e\operatorname{sen}E(\cos E - e)}{(1-e\cos E)^2}$





$x = a\cos E - ae$

$y = a\operatorname{sen}E\sqrt{1-e^2}$

$x^2+y^2 = a^2\cos^2E + a^2e^2 - 2a^2\cos E\, e + a^2\operatorname{sen}^2E(1-e^2)$

$a^2 + a^2e^2 - 2a^2\cos E\, e - e^2a^2\operatorname{sen}^2E =$

$= a^2(1+e^2-2e\cos E - e^2\operatorname{sen}^2E)$ $\quad r = a(1-2e\cos E+e^2)^{1/2}.$

$\frac{a}{a^{3/2}}\frac{\operatorname{sen}E(\cos E-1-e^2)}{\mu^{1/2}(1-e^2)^{1/2}}$

$a^2(1-2e\cos E+e^2\cos^2E)$

$r = a^{2/2}(1-e\cos E)^{2/2}.$

$-\frac{2c}{e}\frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}}\left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}\right)^{1/2}\cdot\frac{(1-e\cos E)a^{3/2}}{\mu^{1/2}}$

$-\frac{2ca^{3/2}}{e\,\mu^{1/2}}$

$\sqrt{\frac{(1+e\cos E)(1-e\cos E)}{(1-e^2\cos^2E)^{1/2}}}$