DINÁMICA ESTELAR I (2013)

Parcial: 1era fecha - 14/12/2012 3

1) Dada la energía por unidad de masa de una partícula en órbita circular de radio R en un potencial newtoniano:

$$E/m = -\frac{1}{2}\frac{GM}{R}. \tag{1}$$

Hállese la expresión del potencial en el cual una partícula moviéndose en el campo generado por aquél, en órbita circular, posee una energía por unidad de masa igual a (1). Coméntese.

2) Sea un sistema virializado con energía total E_0 y energía cinética T_0. Un agente externo perturba a este sistema incrementando su energía cinética en una cantidad ΔT. Demuéstrese que, cuando el sistema vuelve a estar virializado, su energía cinética ha disminuido en ΔT.

3) La inestabilidad de Jeans puede analizarse exactamente, sin hacer uso de la trampa de Jeans, en ciertos sistemas rotantes cilíndricos. Considérese un fluido homogéneo autogravitante de densidad ρ_0, contenido en un cilindro infinito de radio R_0. Las paredes del cilindro y el fluido rotan con velocidad angular $\vec{\Omega}_0 = \Omega \mathbf{e}_z$, donde $\mathbf{e}_z$ yace sobre el eje del cilindro. Así, la aceleración gravitatoria dentro del cilindro estará dada por:

$$-\nabla\phi_0 = -2\pi G\rho_0\,(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y).$$

Y, usando la ecuación de Euler en un sistema rotante, la condición que debe cumplir Ω para que el fluido esté en equilibrio cuando no hay gradientes de presión, será: $\Omega^2 = 2\pi G\rho_0$. Considérese además que $R \to \infty$, o, lo que es equivalente, considérense longitudes de onda $\lambda \ll R_0$, de manera tal que la condición de contorno debida a la pared pueda ser despreciada. Trabajando en el sistema rotante, encuéntrese la relación de dispersión para el caso en que las ondas se propagan paralelamente a $\vec{\Omega}$. Muéstrese que dichas ondas son estables si y solo si se satisface el criterio de Jeans.

Partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\omega\rho_a - \rho_o\vec{K}\cdot\vec{v}_a = 0$$

$$-i\omega\vec{v}_a + i\frac{v_s^2}{\rho_o}\rho_a\vec{K} + i\phi_a\vec{K} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_a = 0$$

$$-k^2\phi_a = 4\pi G\rho_a,$$

donde $|\vec{K}| = k$. Donde dicho sistema de ecuaciones es obtenido a partir de las ecuaciones linealizadas de un fluido bajo el escenario planteado y considerando pequeñas perturbaciones del tipo:

$$\rho = \rho_o + \epsilon\rho_1$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \epsilon\vec{v}_1$$

$$\phi = \phi_o + \epsilon\phi_1,$$

con $\epsilon << 1$, $\rho_1 = \rho_a e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_a e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ y $\phi_1 = \phi_a e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

4) Considérese la transformada de Fourier de la ecuación de Fokker–Planck en la aproximación local para el caso unidimensional y coeficientes de viscosidad α y de difusión σ constantes:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\alpha\xi\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 F,$$

donde $F(\xi, t)$ es la transformada de la distribución de velocidades $f(v,t)$ y ξ la variable conjugada de la velocidad v. Encuéntrese la solución $f(v,t)$ para el caso $\alpha = 0$, suponiendo como condición inicial $f(v,0) = \delta(v - v_0)$, es decir, que todas las partículas tienen inicialmente velocidad v_0. Interprétese físicamente.