b) Se define el conjunto $R_b = \{ b * a * b^{-1} : a \in G \} \subseteq G$

(Notar que $c \in R_b \Leftrightarrow \exists a \in G / b * a * b^{-1} = c$, donde "b" está fijo)

Veamos que $(R_b, *)$ es un subgrupo de $(G, *)$: asociar y usar que $b*e = e*b$

i) $R_b \neq \emptyset$: Como $e \in G$ cumple: $e = e * (b * b^{-1}) = b * e * b^{-1} \Rightarrow e \in R_b$

busca el "$a \in G$" en este caso

ii) Sean $c, c' \in R_b \Rightarrow \exists a, a' \in G / c = b * a * b^{-1} \wedge c' = b * a' * b^{-1}$

Veamos que $c * c'$ también pertenece a R_b (es decir, que $c * c' = b * \tilde{a} * b^{-1}$, para algún $\tilde{a} \in G$):

$$c * c' = (b * a * b^{-1}) * (b * a' * b^{-1}) = b * (a * \underbrace{b^{-1} * b}_{=e} * a') * b^{-1} = b * \underbrace{(a * a')}_{\tilde{a} \in G} * b^{-1}$$

$\therefore c * c' \in R_b$ ✓

iii) Sea $c \in R_b$ ¿$\exists c^{-1} \in R_b$? Es decir, buscamos $c' \in R_b$ que verif. que:

$$c * c^{-1} = e \Rightarrow (b * a * b^{-1}) * c^{-1} = e \Rightarrow a * b^{-1} * c^{-1} = b^{-1} * e = b^{-1}$$

$$\Rightarrow b^{-1} * c^{-1} = a^{-1} * b^{-1} \Rightarrow c^{-1} = b * \underbrace{a^{-1}}_{\in G} * b^{-1} \therefore c^{-1} \in R_b$$

$$c^{-1} * c = (b * \underbrace{a^{-1} * \underbrace{b^{-1}) * (b}_{=e} * a}_{=e} * b^{-1}) = b * b^{-1} = e$$

y vale que el c^{-1} encontrado es efectivamente el opuesto de c.

2. $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z \}$ sobre $\mathbb{R}$

Sea $\vec{v} \in S \Rightarrow \vec{v} = (x, 2z, z) = (x, 0, 0) + (0, 2z, z) = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \overbrace{(1, 0, 0)}^{v_1} + \underbrace{z}_{\in \mathbb{R}} \overbrace{(0, 2, 1)}^{v_2}$

Como $\vec{v}$ se escribe como comb. lineal de v_1 y v_2, $\{v_1, v_2\}$ genera a S.

Veamos que son linealmente independientes:

Sup. $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} / \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow (\alpha_1, 0, 0) + (0, 2\alpha_2, \alpha_2) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \therefore$ son l.i. $\rightarrow$ como $\{v_1, v_2\}$ son l.i. y generan a S, $\{v_1, v_2\}$ es base de S.

3. $T = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a + d = 0 \}$ $\rightarrow$ Para ver que es subesp. debe satisfacer:

i) $T \neq \emptyset$: $0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple que $0 + 0 = 0 \therefore 0 \in T \rightarrow T \neq \emptyset$

ii) Sean $A, A' \in T \Rightarrow A + A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$, $\tilde{a} + \tilde{d} = a + a' + d + d'$

$= \underbrace{(a + d)}_{=0} + \underbrace{(a' + d')}_{=0}$

$a + d = 0$, $a' + d' = 0$

$= 0$

$\therefore A + A' \in T$

iii) Sea $A \in T, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$, $\tilde{a} + \tilde{d} = \alpha a + \alpha d = \alpha \underbrace{(a + d)}_{=0} = 0$.

$\therefore \alpha \cdot A \in T$

De i), ii) e iii) $\rightarrow S$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Fin
***