3) λ es autovalor de A (es decir, $\det(A-\lambda I)=0$)
Queremos ver si $\lambda' = \lambda+\alpha$ es autovalor de $A' = A+\alpha I$. Lo vemos:

$$\det(A'-\lambda' I) = \det\big((A+\alpha I) - (\lambda+\alpha) I\big) = \det(A+\alpha I - \lambda I - \alpha I) =$$
$$= \det(A-\lambda I) = 0 \therefore \lambda' \text{ es autovalor de } A'$$

III) Espacios vectoriales.

1. Como $(G,*)$ es grupo, sabemos que: • $G \neq \emptyset$
- Sean $a, a' \in G \Rightarrow a*a' \in G$ - ($*$ es cerrada en G)
- Sean $a, a', a'' \in G \Rightarrow a*(a'*a'') = (a*a')*a''$ ($*$ es asoc. en G)
- $\exists\, e \in G \,/\, a*e = e*a = a$ ($\exists$ neutro "e")
- $\forall a \in G, \exists\, a^{-1} \in G \,/\, a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ ($\exists$ inverso de a)

a) Se define el conjunto $S_b = \{a \in G : a*b = b*a\}$. Para ver que $(S_b, *)$ es un subgrupo de $(G,*)$, vemos: trivialmente, $S_b \subseteq G$

i) $S_b \neq \emptyset$
↳ $e \in G$ verifica $e*b = b*e \Rightarrow e \in S_b \therefore S_b \neq \emptyset$

ii) $*$ es cerrada en S_b
↳ sean $a, a' \in S_b$ (por def. de S_b, cumplen: $\begin{matrix} a*b = b*a \\ a'*b = b*a' \end{matrix}$), tenemos que ver si $a*a' = c \in S_b$, es decir, si $c \in G$ cumple $c*b = b*c$
$c \in G$ pues $*$ es cerrada en G, sólo resta ver que cumpla ↗

$$c*b = (a*a')*b \underset{(G,*)\text{ asoc.}}{=} a*(a'*b) \underset{a' \in S_b}{=} a*(b*a') \underset{(G,*)\text{ asoc}}{=} (a*b)*a' \underset{a \in S_b,\ (G,*)\text{ asoc.}}{=} \underbrace{b*(a*a')}_{=c} \checkmark$$

iii) Si $a \in S_b \Rightarrow a^{-1} \in S_b$
↳ Como $a \in S_b \Rightarrow a*b = b*a \Rightarrow a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(b*a)$ aplico $a^{-1}*$ a ambos lados
$$\Rightarrow \underbrace{(a^{-1}*a)}_{=e}*b = (a^{-1}*b)*a \Rightarrow b*a^{-1} = (a^{-1}*b)*\underbrace{a*a^{-1}}_{e}$$
aplico $*a^{-1}$ a ambos lados

$$\Rightarrow b*a^{-1} = a^{-1}*b \therefore a^{-1} \in S_b$$