Como las raíces son complejas, esa no es la factorización en $\mathbb{R}[x]$. Recordar que en $\mathbb{R}[x]$ los únicos polinomios irreducibles son los de grado 1 ó grado 2. La forma de que la factorización quede en $\mathbb{R}[x]$, es multiplicar los monomios en que aparecen z y $\bar{z}$, es decir:

$$\boxed{p(x) = 6[(x-2i)(x+2i)][(x-2i)(x+2i)] = 6[(x-2i)(x+2i)]^2 = \underline{6(x^2+4)^2}}$$ Fact. en $\mathbb{R}[x]$

II) Matrices.

1) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $(E_1(3))^{-1} \cdot E_1^3(4) \cdot A = I \Rightarrow \underbrace{E_1(3)\cdot (E_1(3))^{-1}}_{=I} E_1^3(4)\, A = E_1(3)\cdot I$

$$\Rightarrow E_1^3(4)\cdot A = E_1(3) \Rightarrow \underbrace{(E_1^3(4))^{-1}\cdot E_1^3(4)}_{=I}\cdot A = (E_1^3(4))^{-1}\cdot E_1(3)$$

Nota:
(Tener mucho cuidado con el orden de los factores! el producto matricial no es conmutativo, si de un lado de la igualdad multiplica a izquierda, del otro lado <u>también</u> tiene que multiplicar a izquierda - idem si fuera a derecha)

$\Rightarrow A = (E_1^3(4))^{-1}\cdot E_1(3)$; como $(E_1^3(4))^{-1} = E_1^3(-4) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$ y $E_1(3) = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\-12&0&1\end{pmatrix}}$$

2) a) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&1&1&-2\\2&2&8&4\\1&0&1&0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\1\\12\\1\end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow$

b) $\tilde{A} = \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{A}_{4\times 4 = \text{nº de incógnitas } (n)} & \underbrace{\vec{b}}_{4\times 1}\end{array}\right)}^{4\times 5}$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\2&2&8&4&12\\1&0&1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot f_3} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\1&1&4&2&6\\1&0&1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&1&1&-2&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_4-f_1} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&1&1&-2&1\\0&0&-2&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&-4&-4\end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}f_4} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&2&2\end{pmatrix} \xrightarrow{P_{34}} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \therefore \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\tilde{A} = 3 < n = 4$$

c) Por el Teo. de R-F., $\exists\, \infty$ soluciones (sist. compatible indeterminado)

d) Para ver la sol. terminamos de resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&1&-2&1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_3} \begin{pmatrix}1&0&3&4&5\\0&1&0&-4&-1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{f_1-3f_3} \begin{pmatrix}1&0&0&-2&-1\\0&1&0&-4&-1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \therefore \begin{cases} x = -1+2w \\ y = -1+4w \\ z = 2-2w \\ w = w \end{cases}, \quad w \in \mathbb{R}$$