I) Polinomios.

1. a raíz de $p(x)$ y $q(x)$ $\Leftrightarrow$ a raíz de $(p(x), q(x))$

$\Rightarrow$) Por prop. del m.c.d, sabemos que $\exists\, r(x), s(x) \in K[x]$ tal que:

$d(x) = (p(x), q(x)) = r(x) \cdot p(x) + s(x)\, q(x)$

$\Rightarrow d(a) = r(a) \cdot \underbrace{p(a)}_{=0 \text{ por hipótesis}} + s(a) \cdot \underbrace{q(a)}_{} = 0 \therefore a$ es raíz de $(p(x), q(x))$

$\Leftarrow$) Llamemos $d(x) = (p(x), q(x))$. Por hipótesis, $d(a) = 0$

Ahora, por def. de m.c.d.: $d(x) / p(x) \Rightarrow p(x) = d(x) \cdot h(x)$ $\in K[x]$

$\Rightarrow p(a) = \underbrace{d(a)}_{=0} \cdot h(a) = 0$

$\therefore$ a es raíz de $p(x)$, como queríamos probar

Análogamente se ve que a es raíz de $q(x)$

2. $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, de grado 4 $\Rightarrow p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$

Como tiene que ser mónico. $a = 1$; i es raíz doble $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = i$.

(Nota: NO confundirse, $p \in \mathbb{C}[x]$, no a $\mathbb{R}[x]$, por eso no vamos a tener que imponer que $\bar{i} = -i$ también sea raíz); para que sea divisible por $x+1$, hay que pedir $\alpha_3 = -1$. Hasta ahora tenemos:

$p(x) = (x-i)^2 (x+1)(x-\alpha_4)$; de la condición $p(0) = 2$ resulta:

$p(0) = (0-i)^2 (0+1)(0-\alpha_4) = 2 \Rightarrow -1 \cdot 1 \cdot (-\alpha_4) = 2 \Rightarrow \alpha_4 = 2$

$\therefore \boxed{p(x) = (x-i)^2 (x+1)(x-2)}$ Sabemos que es único pues el Teorema Fundamental de la Aritmética nos asegura que la factorización es única.

3. $p(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 6(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

Como $z = 2i$ es raíz doble $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 2i$. Además, como los coeficientes son reales, si z es raíz $\Rightarrow \bar{z}$ también lo es. Luego, $\alpha_3 = \alpha_4 = \overline{2i} = -2i$

$\therefore \boxed{p(x) = 6(x-2i)^2 (x+2i)^2}$ Factorización en $\mathbb{C}[x]$