Elementos de Astrofísica Teórica

Primera Fecha, 02-12-2011

Observación: Dado que uno de los objetivos principales del parcial es intentar conocer como han asimilado los conceptos discutidos en la práctica, es necesario que la resolución de cada ejercicio vaya acompañada de una breve explicación de lo que se está resolviendo y cómo se interpretan los resultados. Por favor, no entreguen sólo sucesiones de fórmulas con un resultado recuadrado al final, intenten describir lo que están haciendo y cómo interpretan el resultado.

1. Para un modelo estelar lineal con $\rho = \rho_c(1 - r/R)$, derivar:

   a) la variación de la presión con el radio ($P = P(r, R, \rho_c)$) y la relación $m = m(r, R, \rho_c)$. Con esta última derivar la relación masa total-radio del objeto ($M(R)$).

   b) la variación de la temperatura con el radio [$T = T(r, R, \rho_c, \mu, m_H)$] (suponer que la presión sólo se debe a la presión de un gas ideal).

   c) la energía potencial [$W = W(R, \rho_c)$].

   d) Aproximando al sol con este modelo estelar lineal estime la temperatura central y con ella estime el valor de la presión de radiación. Compare este valor con la presión ejercida por el gas, ¿fue correcto suponer que la presión se debía principalmente al gas?

2. Inestabilidad de Jeans. Considerese ahora un fluido barotrópico, estático y autogravitante en el cual la densidad ρ_0 varía muy suavemente (en comparacion con las variaciones de las perturbaciones en la densidad).

   a) Mostrar que en estos casos la solución a la ecuación de onda de la perturbación ρ_1 cumple la "relación de dispersión"
   $$\omega(\vec{k})^2 = {c_s}^2 k^2 - 4\pi G \rho_0.$$
   Sugerencia: Encuentre las ecuaciones para ρ_1 y proponga una solución $\rho_1 = c e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$.

   b) Mostrar que esto define un número de onda crítico
   $${K_J}^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{{c_s}^2}$$
   por debajo del cual ρ_1 tiene un comportamiento exponencial. Interpretar físicamente.

   c) Mostrar que esa longitud de onda (λ_J) está asociada a una masa crítica dada por
   $$M \sim \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3$$

   d) Dado que sabemos que las estrellas se forman del colapso de nubes de gas interestelar de H neutro a densidades y temperaturas de $\rho \sim 10^{-24}$ [g/cm^3] y $T \sim 100$K. Calcular la masa crítica asociada y compare con las masas estelares. ¿Qué puede decir?

3. *a*) Suponiendo que la función fuente (S) está dada por la Ley de Planck, y suponemos que vale la estratificación de la temperatura ($T(\tau)$) de la atmósfera gris bajo la Aproximación de Eddington;
   $$T^4 = \frac{3}{4}{T_{\rm ef}}^4(\tau + \frac{2}{3})$$
   demostrar que la función fuente entonces cumple
   $$S_\tau = a + b\,\tau.$$

b) Con este resultado, mostrar que la intensidad emergente en el caso de la atmósfera seminfinita cumple

$$I(\tau = 0, \mu) = a' + b' \mu.$$

Discutir cómo podría usar este resultado para reconstruir la función fuente del sol mediante la medición de la radiación emergente.

4. *a*) Tomando un universo dominado por materia fría (polvo) con densidad crítica ($\Omega = 1$) y utilizando el valor medido de la constante de Hubble ($H_0 \sim 70$Km/s/Mpc) calcule la edad del universo.

   b) Utilizando que la potencia total radiada ("luminosidad") por las estrellas en la secuencia principal cumple[1] $L_\star \approx L_\odot \times (M_\star/M_\odot)^3$, determinar si es posible encontrar, al día de hoy, estrellas "primordiales". Discutir.

[1]De manera muy gruesa, se obtiene suponiendo un gas ideal clásico y opacidad constante