FINAL ALGEBRA LINEAL 05/05/2010

1) Sea V un K-espacio vectorial de dimension finita, W un subespacio de V
a) Demostrar que W es un hiperespacio de V si y solo si existe una transformación lineal f no nula tal que W=ker(f)
b) Demostrar que $\dim(W)+\dim(W^o)=\dim(V)$

2) Sea v un vector no nulo de V y sea Pv el T-anulador de v
a) Demostrar que el grado de Pv es igual a la dimension del subespacio cíclico Z(v; T)
b) Demostrar que si el grado de Pv es k, entonces los vectores $\{v, Tv, ..., T^{k-1}v\}$ forman una base de Z(v; T)
c) Demostrar que si U es el operador en Z(v; T) inducido por T, entonces el polinomio minimal de U es Pv.

3) Sea V un K-espacio vectorial con producto interno y T un operador lineal autoadjunto sobre V
a) Demostrar que todo autovalor de T es real.
b) Demostrar que dos autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

4) Sea W un subespacio de un espacio producto interno V de dimension finita y sea w un vector de V.
a) Demostrar que existe un vector v de W tal que $\| w - v \| \leq \| w - u\|$ para todo vector u en W.
b) Demostrar que si existe un v como en el inciso anterior, entonces ese v es único.

Probar ademas que si $\{v_1, \dots v_n\}$ es una base ortonormal cualquiera de W, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{< w - v_k >}{\| v_k \|^2} \cdot v_k$$