Análisis II. Final Prof. Maltz

1. Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto abierto A del plano y sea $P = (x_0, y_0) \in A$.

   a) ¿Cuándo se dice que f es diferenciable en P?

   b) Dar un ejemplo donde se muestre que f puede tener derivadas parciales en P pero no ser diferenciable en ese punto.

   c) Aplicar a) para comprobar que $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ es diferenciable en $(-1, 4)$.

   d) ¿Qué resultado teórico nos permite asegurar la diferenciabilidad de la función f definida en c) sin recurrir a a)?

2. Sean S y T las superficies de las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y $x^2 + zy^4 - zx = 2$ respectivamente. Comprobar que $P = (2, 1, 2)$ pertenece a ambas y:

   a) Analizar la posibilidad de que existan funciones derivables g y h, de modo que los puntos (x, y, z) cercanos a P y pertenecientes a ambas superficies satisfagan $x = g(z)$ e $y = h(z)$.

   b) Hallar un vector tangente en P a la curva determinada por la intersección de las superficies.

   c) Se desea hallar un punto que pertenezca a ambas superficies y esté lo más aejado posible del plano (x, y). Describa el método que usaría para resolver este problema y las ecuaciones a las que conduce en este caso (no resolverlas).

3. Consideremos que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = P(x, y)i \;+\; Q(x, y)j$ donde:

$$P(x, y) = \tfrac{-y}{x^2+y^2}$$
$$Q(x, y) = \tfrac{x}{x^2+y^2}$$

   a) Calcular

$$\oint_C Pdx + Qdy$$

donde C es una curva que recorre el círculo dee radio 2 y centro en el origen, dando una vuelta completa en sentido antihorario e iniciando su recorrido en $(2, 0)$.

b) Estudiar la posibilidad de que exista una función G con dominio en $A = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$ y tal que $\vec{\nabla} G = F$.

c) La misma cuestión planteada en b) pero con $A = \{(x, y) : x \geq 1\}$.

d) Enuncie las propiedades que ha tenido en cuenta para contestar b) y c).