1. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial, $\dim_K(\mathbb{V}) = n$, y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un operador lineal que tiene n autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

   a) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tal que la matriz de T con respecto a esta base sea diagonal. Justificar que el conjunto de vectores hallado constituye una base de $\mathbb{V}$.

   b) Sea $\mathcal{B}$ como en el inciso anterior, y notemos $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Probar que $v = v_1 + \ldots + v_n$ es un vector T-cíclico. (Sugerencia: si $p \in K[x]$ calcular $p(T)v_i$ y considerar polinomios de Lagrange).

2. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial con $\dim_K \mathbb{V} = n$. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y sean $W_1, W_2 \subset \mathbb{V}$ subespacios T-invariantes tales que $\mathbb{V} = W_1 \oplus W_2$. Sean $T_i = T|_{W_i} \in \mathcal{L}(W_i)$, $i = 1, 2$. Probar:

   a) Si $q \in K[x]$ es tal que $q(T) = 0$ entonces $m_{T_1} \mid q$ y $m_{T_2} \mid q$. $\quad q = m_T\, K[x]$

   b) Si $q \in K[x]$ es tal que $q(T_1) = 0$ y $q(T_2) = 0$ entonces $m_T \mid q$.

   c) Deducir de lo anterior que $m_T =$ m.c.m.(m_{T_1}, m_{T_2}). $\quad q = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$

3. Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con p.i., $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

   a) Mostrar que dado $f \in \mathbb{V}^*$ existe un único $v_f \in \mathbb{V}$ tal que $f(v) = \langle v, v_f \rangle$, $\forall v \in \mathbb{V}$.

   b) Mostrar que la función $e : \mathbb{V}^* \to \mathbb{V}$ dada por $e(f) = v_f$ (con la notación de item anterior) es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ espacios vectoriales.

   c) Mostrar que dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ (no necesariamente ortonormal) entonces existe otra base $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle\, w_i\ , \quad \forall v \in \mathbb{V}\ .$$

4. Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con p.i., $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{V} = n$. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un operador normal. Probar $\quad f \circ f^* = f^* \circ f$

   a) $\ker T = \ker T^*$.

   b) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda I - T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es normal.

   c) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces λ es autovalor de T si y sólo si $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ es autovalor de T^* y en este caso $E_T(\lambda) = E_{T^*}(\overline{\lambda})$.

   d) Probar que si λ, μ son dos autovalores distintos de T entonces $E_T(\lambda) \subseteq E_T(\mu)^{\perp}$.

Preguntado!

Final Algebra Lineal - Observatorio

Agosto 2012

1. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial con $\dim_K \mathbb{V} = n$. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y $v \in \mathbb{V}$ tales que $Z(v, T) = \mathbb{V}$.

   a) Mostrar que si $U, V \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ son tales que conmutan con T y tales que $Uv = Vv$ entonces $U = V$.

   b) Mostrar que si $U \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ conmuta con T entonces existe $p \in K[x]$ tal que $U = P(T)$.

2. Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial, $\dim_K(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$. Probar:

   a) $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}$ es un hiperespacio si y solo si existe $f \in \mathbb{V}^*$ no nulo tal que $\mathbb{W}_1 = \ker(f)$.

   b) Si $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}$ es subespacio entonces $\dim_K(\mathbb{W}_2) + \dim_K(\mathbb{W}_2^o) = n$.

   c) Si $\mathbb{W}_3 \subset \mathbb{V}$ es subespacio y $\dim_K(\mathbb{W}_3) = k$ con $1 \leq k \leq n-1$, entonces existen $(n-k)$ hiperespacios de $\mathbb{V}$ cuya intersección es $\mathbb{W}_3$.

3. Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un K-espacio vectorial con producto interno, $\dim_K(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$. Sea $W \subset \mathbb{V}$ un subespacio y sea $v \in \mathbb{V}$. Probar:

   a) Existe un único vector $w_0 \in W$ tal que $\|v - w_0\| \leq \|v - w\|$ para todo $w \in W$;

   b) Si w_0 es el vector del ítem anterior entonces $v - w_0 \in W^{\perp}$.

   Más aún, si suponemos que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ortonormal de W entonces verificar que $w_0 = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle \, u_i$.

4. Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = n \in \mathbb{N}$, y sea $\mathcal{B} \in \mathrm{Bil}(\mathbb{V})$ una forma bilineal simétrica.

   a) Probar que existe una base ortonormal $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que si $v \in \mathbb{V}$ está dado por $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ entonces

   $$\mathcal{B}(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \alpha_i^2 .$$

   b) Mostrar que la forma cuadrática asociada a $\mathcal{B}$ es definida positiva si y solo si $\lambda_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$ en la representación del item a). Deducir que en el caso en que la f.c. es definida positiva, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}(v, v) \geq \delta \, \|v\|^2$, $\forall \, v \in \mathbb{V}$.