Abelardo Ramírez

Matemáticas Especiales I — Curso 2013 (segundo cuatrimestre)
Primer parcial - Tercera fecha - 27-02-2014

1. Sea la función $f(z) = e^{1/z} - a$, $a \in \mathbb{R}$. Sea $S = \{z : f(z) = 0\}$.
   (a) Determinar el conjunto S para todos los valores de a posibles.
   (b) Supongamos $a < 0$ y S el conjunto correspondiente. Responder:
      i. Es S acotado ?
      ii. Cuáles son los puntos de acumulación de S, si los tiene ?
      iii. Es S abierto o cerrado ?
      iv. Cuál es la clausura de S ?
      v. Comprobar que la frontera del dominio de analiticidad de $w(z) \subset \bar{S}$.

2. (a) Siendo $z = x + iy$, sea la función $f(z) = (x+y)|y-x| + i(2xy + x^2 - x)$.
   Determinar donde existe $f'(z)$ y encontrar su expresión. Es $f(z)$ holomorfa en algún punto?
   (b) Encontrar el dominio de definición y derivabilidad de

$$f(z) = \frac{1}{e^{1/z}} - \frac{z}{1 - \sqrt{2i(z+1)}},$$

   considerando primero la rama principal de la raíz cuadrada y en segundo lugar la otra rama asociada al mismo corte.

3. (a) i. Encontrar la imagen de la frontera de la región triangular delimitada en el primer cuadrante por las rectas $y = x$, $x = 1$ e $y = 0$ (recorridas en ese orden) mediante la transformación $w(z) = z + z^2$.
      ii. Calcular el vector tangente a la recta $y = x$ en $P = (0,0)$ según el sentido de recorrido anterior. Con qué ángulo rota la tangente a la curva imagen en $f(P)$? Justificar.
   (b) Encontrar la imagen de la franja semi-infinita $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y \geq 0$ mediante la transformación $w(z) = e^{iz} + 1 - i$ y mostrar las partes correpondientes a la frontera. La frontera es cerrada?

4. (a) Sea C el borde de la región $\{z : |z| \leq 1\ ;\ y \geq 0\}$. Sea $f(z)$ la rama de la función multivaluada $2z + \sqrt{z}$ tal que $f(1) = 3$. Calcular $\int_C f(z)dz$. Se puede utilizar el Teorema de Cauchy para realizar este cálculo?
   Observación: si $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, entonces $z^a = e^{a \ln z}$.
   (b) Sea la función $F(t)$ definida como

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z + e^{zt}}{z^3(z^2 - 1)} dz,$$

   donde C es cualquier curva cerrada, simple y orientada positivamente que contiene en su interior al origen y a los puntos $z = \pm 1$. Probar que

$$\lim_{t \to 0} F(t) = 0$$