Alelordr Ramires

Matemáticas Especiales I — Segundo parcial - Segunda fecha - 20/02/14

1. (a) Considere la función $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 - 4\pi^2)(1 - \cos z)}$.
   i. Hallar todos sus puntos singulares e indicar si son aislados o no aislados.
   ii. Clasificar sus puntos singulares aislados. En caso de ser un polo, dar el orden del mismo.
   iii. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo γ el círculo $|z| = 1/2$.

   (b) Analizar el comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$.

2. Sea la sucesión $\varphi_n(z) = e^{-n(z+1)}$.
   (a) Hallar la región de convergencia puntual y probar que la sucesión converge uniformemente en regiones del tipo $\Omega_r = \{z,\ \operatorname{Re} z \geq r,\ r > -1\}$.
   (b) Analizar la convergencia uniforme de la serie $F(z) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(z)$.
   (c) Es cierto que $F'(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{-n}{e^n}$? Justificar la respuesta.

3. Sea la función $g(z) = 3\dfrac{\operatorname{sh}(z + 2\pi i)}{(z + 2\pi i)^4} + \dfrac{\pi i}{z^2 + 2\pi i z}$.
   (a) Hallar el radio del mayor disco centrado en $z_0 = 1$ en el cual $g(z)$ puede desarrollarse en series de Taylor.
   (b) Indicar todas las coronas con centro en $z_1 = -2\pi i$ en las que $g(z)$ puede desarrollarse en series de Laurent.
   (c) Hallar el desarrollo en series de Laurent de $g(z)$ de la forma $\sum_{n\geq 0} \dfrac{b_n}{(z - z_1)^n} + \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_1)^n$ que sea convergente en $z = i$. Dónde converge este desarrollo? Calcular b_1.
   (d) Demostrar que $\int_\gamma g(z)dz \neq b_1$ Hay alguna contradicción en este resultado? Justificar su respuesta.

4. Probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch}(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi a}{2}\right)},\quad a \in \mathbb{R}$

   Sugerencia: integrar $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iaz}}{\operatorname{ch}(z)}$ donde γ es el rectángulo con vértices en $-R$, R, $R + i\pi$ y $-R + i\pi$.