ANTIAGO ACTIS

Matemáticas Especiales I — Segundo parcial - Primera fecha - 19/12/13

1. (a) Considere la función $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z^2+4)(e^{4\pi/z}-1)}$.

    i. Hallar todos sus puntos singulares e indicar si son aislados o no aislados.

    ii. Clasificar sus puntos singulares aislados. En caso de existir una singularidad evitable, indicar qué valor le asignaría a la función en ese punto para que resulte analítica.

    iii. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo γ el círculo $|z-i| = 5/12$.

   (b) Analizar el comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$.

2. Sea la sucesión $\varphi_n(z) = \dfrac{1}{z-ni}$.

   (a) Hallar la región de convergencia puntual y probar que la sucesión converge uniformemente en $\{z = x+iy,\ y \leq -r,\ r > 0\}$.

   (b) Analizar la convergencia uniforme de la serie $F(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi_n(z)}{\sqrt{n}+1}$.

   (c) Calcular $\int_C F(z)\,dz$, donde C es el círculo $|z+2i| = 1$. Justificar la respuesta.

Sea la función $g(z) = 2z\cos(1/z) + \dfrac{1}{z-2}$.

(a) Hallar el radio del mayor disco centrado en $z_0 = i$ en el cual $g(z)$ puede desarrollarse en series de Taylor.

(b) Indicar todas las coronas con centro en $z_1 = 0$ en las que $g(z)$ puede desarrollarse en series de Laurent.

(c) Hallar el desarrollo en series de Laurent de $g(z)$ de la forma $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ que sea convergente en $2+i$. Dónde converge este desarrollo?

(d) Comprobar que $b_1 = 0$. Es cierto que $\mathrm{Res}_{z=0}\, g(z) = 0$? Justificar su respuesta.

Probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Sugerencia: integrar $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ *en el contorno de la región* $\{z : 0 < |z| < R;\ 0 < Arg z < \dfrac{2\pi}{3}\}$.