Consuelo Sagarra

(4,5)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS. FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS. U.N.L.P.

MATEMÁTICAS ESPECIALES - 2012

SEGUNDO PARCIAL - FECHA 1 - 10/07/12

El parcial se aprueba con 6 o más puntos. Errores de cuenta restan puntaje.

1. (2p) Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + xy' + y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

2. Considerar la ecuación diferencial ordinaria

$$xy'' + (1 - x)y' + py = 0 \tag{1}$$

   a) (0.5p) Determinar si $x = 0$ es un punto ordinario, singular regular o singular no regular.

   b) (1p) Encontrar la fórmula de recurrencia para los coeficientes de una solución en serie (alrededor de $x = 0$). → $\lambda > 0$

   c) (1p) Demostrar que si p es un entero no negativo entonces la ecuación tiene soluciones polinomiales.

   d) (1p) Escribir (1) en la forma de Sturn-Liouville. → $\frac{d}{dx}\left[p(x)\, y'(x)\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0$

   e) (1p) Llamemos $L_p(x)$, $p \in \mathbb{N}$, a los polinomios solución de la ecuación (1) tales que $L_p(0) = 1$. Probar que la familia $\{L_p\}$ es ortogonal en el intervalo $[0, \infty)$ con densidad o peso $\rho(x) = e^{-x}$.

3. (1.5p) Encontrar la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$.

4. (2p) Encontrar la función $u(x,t)$ que satisface:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Sugerencia: Extender $u(x,t)$ de manera impar al semiplano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. La función extendida es solución de un problema más sencillo de resolver.

1	1
2	0,5 0,3 1 0
3	1,5
4	—

D

A