Dip ANA CECILIA -

Matemáticas Especiales I — Segundo parcial - Primera fecha - 21/12/09

1. (a) Considere la función $f(z) = \dfrac{z^2 - 4}{(z-1)\,\mathrm{sen}\,(4\pi/z)}$.
   i. Hallar todos sus puntos singulares e indicar si son aislados o no aislados.
   ii. Clasificar sus puntos singulares aislados. En caso de existir una singularidad evitable, indicar qué valor le asignaría a la función en ese punto para que resulte analítica.
   iii. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo γ el círculo $|z-3| = 3/2$.

   (b) Analizar el comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$.

2. (a) Dada la serie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+z} e^{inz}$,
   i. hallar la máxima región de convergencia.
   ii. Demostrar que en $\{z = x+iy,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ la serie converge uniformemente.

   (b) Considere la función $g(z) = \mathrm{sen}\,(1/z) + \dfrac{4}{z(z-2)^2}$.
   i. Hallar el radio del mayor disco centrado en $z_0 = i$ en el cual $g(z)$ puede desarrollarse en series de Taylor.
   ii. Indicar todas las coronas con centro en $z_1 = 0$ en las que $g(z)$ puede desarrollarse en series de Laurent.
   iii. Hallar el desarrollo en series de Laurent de $g(z)$ que permita la clasificación del punto z_1. Dónde converge este desarrollo?
   iv. Comprobar que $\int_C g(z)\,dz = 0$, para cualquier curva C contenida en $|z| < 1$ que no pase por z_1. Puede afirmar entonces que $f(z)$ es analítica en dicha región?. Justifique su respuesta.

3. Probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Sugerencia: integrar $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ *en el contorno de la región* $\{z : 0 < |z| < R;\ 0 < Arg z < \frac{2\pi}{3}\}$.

4. Considere las funciones $f(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(1-\frac{1}{2z})t}\,dt$ y $g(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n z^n}$.

   (a) Hallar sus dominios de definición.
   (b) Mostrar que $f(z)$ es un prolongamiento analítico de $g(z)$.
   (c) Puede encontrar un prolongamiento analítico de $g(z)$ que esté definido en $z = 1/2$? Y en $z = 0$? Justificar la respuesta.

1a	R
b	B-
2a	R+
b	B-
3	B
4	B