~~BORGES~~ BARLE

Deja
1er Parcial: completo
2do Parcial: 1, 3b, 4

Matemáticas Especiales I — Segundo parcial - Segunda fecha - 19/02/13

1. (a) Comprobar que $f(x,y) = e^x \cos y$ es armónica (en qué región?) y hallar una armónica conjugada $g(x,y)$.
   (b) Utilizando el inciso anterior, encontrar una función $V(x,y)$ armónica definida en la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ y \leq 0\}$ y tal que
   $$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y=0,\ -1<x<1 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{-y}{1+x}\right) & \text{si } x^2+y^2=1,\ y<0 \end{cases}$$
   Sugerencia: transformar Ω mediante el mapeo $w(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$. Justificar los pasos realizados.

2. (a) Sea la sucesión de funciones $\varphi_n(z) = \left(\dfrac{z-1}{2z}\right)^n$.
   i. Determinar la región de convergencia puntual Ω y encontrar la función límite. Justificar por qué la convergencia no puede ser uniforme en Ω.
   ii. En qué tipo de regiones la sucesión converge uniformemente?. Demostrar lo que se afirma.
   iii. Analizar la convergencia uniforme de las series $\sum_{n\geq 0} \varphi_n(z)$ y $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\varphi_n(z)}{n^2+|z|}$.
   (b) Dada $f(z) = -\mathrm{Ln}(2/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n (z-1/3)^n$.
   i. Hallar la región donde la serie representa a una función analítica y encontrar una expresión funcional para $f(z)$. Justificar todos los pasos realizados. (Sugerencia: derivar.)
   ii. Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se puede afirmar que la función $g(z) = \dfrac{(f(z)+\mathrm{Ln}(2/3))^n}{(3z-1)^2}$ tiene en $z = 1/3$ un cero de orden mayor o igual a 2?

3. (a) Sea la función $f(z) = \dfrac{8z^3+i}{(z^2+1)\operatorname{sen}(\pi i/z)}$.
   i. Hallar todos sus puntos singulares (incluido el ∞) e indicar si son aislados o no aislados.
   ii. Clasificar sus puntos singulares aislados (en caso de ser polos, indicar el orden de los mismos).
   iii. Calcular el residuo en $z=i$ de $g(z) = \dfrac{1}{(z-i)\operatorname{sen}(\pi i z)}$.
   (b) Sea la función $f(z) = (z+1)\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right) - \dfrac{2}{z^3-z}$.
   i. Hallar el desarrollo en series de Laurent de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z+1)^n$ que converja en $z_1 = i$. Cuánto vale b_{-1}?
   ii. Este desarrollo tiene infinitos términos en potencias negativas de $z+1$. Puede afirmar entonces que $z=-1$ es una singularidad esencial de la función? Justificar la respuesta.
   iii. Calcular $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=3/2} f(z)\,dz$.

4. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}\,dx$.

   Sugerencia: Integrar la función $f(z) = \dfrac{z^3}{\operatorname{ch} z}$ en la frontera de la región $\{|x| < R,\ 0<y<\pi\}$. Utilizar adecuadamente la paridad ó imparidad de los integrandos.